

Un espace-temps complet minimal de la géométrie de Schwarzschild

©Amanuensis

2022/03/01

Lien de publication de la version courante:

<http://www.lahri.org/public/Kruskalbis-fr.pdf>

Textes et dessins, ©Amanuensis

Commentaires: <https://forums.futura-sciences.com/>

[astrophysiciens-physiciens-etudiants-avances/903510-geon-rp3.html](https://forums.futura-sciences.com/astrophysiciens-physiciens-etudiants-avances/903510-geon-rp3.html)

Contact avec l'auteur: amanuensis at lahari.org

Ma référence : Physique, Schwarshild C, version 1.5

Résumé

La solution du vide de symétrie sphérique asymptotiquement plate décrite par Schwarzschild [Schw 1916] n'était pas complète, au sens où des lignes d'Univers pouvaient être étendues. Une solution décrivant un espace-temps complet, solution du vide de symétrie sphérique, étendant la solution de Schwarzschild a été décrite par Kruskal [Kru60] et d'autres. Cette solution couvre quatre régions séparées par des horizons, dont la région I, extérieure et statique, celle décrite par Schwarzschild; la région II (« le trou noir »); la région IV (« le trou blanc »); et enfin la région III, une seconde région extérieure, symétrique de la région I.

La région III rend perplexes. Des propositions ont été faites pour éliminer la région III tout en ayant une solution complète du vide. Dans [MTW] certaines de ces tentatives sont évoquées sans précision [MTW, 31.6, « *non viable proposals for modifying the topology of Schwarzschild spacetime* »], et ont été considérées comme « non viables ».

De même on trouve l'indication que la géométrie décrite par Kruskal serait « la plus petite extension complète » pour la géométrie de Schwarzschild.

Or il existe une solution peut-être « viable », et plus petite. On la trouve dans une publication de 1966 [Bel65], et peut-être a-t-elle été décrite plus tôt encore. [Fri95] la nomme « \mathbb{RP}^3 geon ». Mais elle semble avoir disparu de la littérature de vulgarisation sur le sujet, peut-être à cause d'une critique en non-viabilité dans [MTW, p.840], pourtant contrée dans [San86].

Table des matières

Historique	3
Arrière-plan	3
Références	3
La solution initiale de Schwarzschild	4
Le géon \mathbb{RP}^3	7
Description par un atlas	7
La symétrie sphérique	10
L'espace	10
Instant privilégié	11
Les lignes t constant	11
Conclusion, et viabilité	12

Historique

Le texte présent a été écrit avant qu'il soit indiqué les références à l'auteur, qu'il n'avait pas réussi à trouver. Le texte était le premier résultat de l'étude des propriétés élémentaires de cet espace-temps. Le texte a été adapté, avec les bonnes références, et le nom, si bizarre, qui lui a été attribué dans [Fri95]. Le texte fait doublon en partie avec des textes en référence, sans en être une traduction ; il est en français et pourra intéresser certains lecteurs.

Mes remerciements au passage à Loïc Villain qui a pris en compte mes questions sur le sujet, et m'a indiqué les références que je désespérais de trouver. Ainsi qu'à Gilles Henri qui m'a encouragé dans ce projet.

Une particularité de cet espace-temps est que certaines sections spatiales ne sont pas simplement connexes, d'où le terme de biconnexe utilisé par la suite.

De par l'absence d'une seconde région extérieure, cette variante pourrait être considérée plus « réaliste » que la topologie couramment présentée avec ses deux régions extérieures jointes par le pont de Rosen. Au minimum, cette variante a sa place dans les présentations usuelles comme autre extension complète de la solution de Schwarzschild.

Arrière-plan

Références

- Schw16** Schwarzschild, K., *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, (1916)
- Edd24** A.S. Eddington, *Nature* 113, 192 (1924)
- Lem25** G.E. Lemaitre, *J. Math. and Phys. (M.I.T.)*, 188 (1925)
- Kru60** M. D. Kruskal, *Maximal Extension of Schwarzschild Metric*, 1960
- MTW73** Misner, Thorne, Wheeler, *Gravitation*, 1973
- Carr93** Carrol, *Lecture Notes on General Relativity*, 1997
- orbifold** <https://fr.wikipedia.org/wiki/Orbifold>
- Bel65** F.J. Belifonte, *Kruskal space without wormhole*, *Physics Letters*, January 1966
- San86** N. Sanchez and B.F. Whiting, *Quantum field theory and the antipodal identification of black holes*, *Nuclear Physics B283*, 1987
- Fri95** J.L. Friedman and alter, *Topological censorship*, arXiv 1995

La solution initiale de Schwarzschild

La solution de Schwarzschild a été une de première solutions explicites des équations d'Einstein du vide, publiée dès 1916 [Schw 1916]. Cette solution est une variété, décrite par un jeu de coordonnées et une forme métrique, la métrique de Schwarzschild. Elle est solution du vide (le tenseur d'Einstein étant partout nul), quand on impose une symétrie spatiale sphérique et qu'elle tende à l'infini spatial vers la solution de Minkowski, l'espace plat.

Si on suppose une masse sphérique de masse M et de rayon R_m dans un univers vide par ailleurs, la solution de Schwarzschild couvre la partie de l'espace-temps pour une distance r du centre supérieure à R_m .

La solution de Schwarzschild présente des termes divergents sauf si $R_m > 2GM/c^2$. Si on prend R_m égal ou inférieur à cette valeur, la forme métrique n'est pas définie en $r = GM/c^2$, un de ses coefficients étant égal à $1/(1 - c^2r/2GM)$ et divergeant donc vers l'infini. Strictement parler, la solution de Schwarzschild ne couvre que la région de l'espace-temps atteinte par les coordonnées de Schwarzschild avec $r > 2GM/c^2$. La valeur $2GM/c^2$ est appelé le rayon de Schwarzschild pour la masse M ; on la note r_s dans ce qui suit.

Néanmoins, la solution formelle peut être appliquée avec $0 < r < r_s$. Il s'agit d'une solution du vide, mais comme cela n'inclut pas r tendant vers l'infini, on ne peut pas y voir une solution asymptotiquement plate. Cela a amené à la notion de trou noir, avec un extérieur, $r > r_s$, asymptotiquement plat, et un intérieur, $r < r_s$, avec une frontière entre les deux, ensemble d'événements pour lesquels la métrique n'était pas définie. Pendant longtemps, cet ensemble a été considéré comme une singularité du champ gravitationnel, ce qui soulevait des questions sur le « sens physique » de cette solution. Les études ultérieures ont montré que ce n'était qu'une singularité de coordonnées, due au choix même des coordonnées. L'ensemble frontière était alors reconnu comme un horizon, limitant une région non observable à partir de l'extérieur. D'autres systèmes de coordonnées, en relation un pour un avec celles de Schwarzschild pour $r > r_s$, mais avec une métrique continument définie au passage $r = r_s$, ont permis d'étendre proprement la solution de Schwarzschild dans l'intérieur. On citera les travaux d'Eddington ou de Lemaître.

Si ces systèmes de coordonnées résolvent la question de l'horizon comme singularité, ils la remplacent par une singularité pour r tendant vers 0, une singularité non effaçable par un changement de coordonnées; il s'agit d'une singularité de courbure, caractérisée par la divergence du scalaire de Kretschmann à l'infini quand r tend vers 0, et ce scalaire est invariant par changement de coordonnées.

Par la suite la notion de complétude est apparue pour un espace-temps, l'incomplétude se manifestant par l'existence de lignes causales incomplètes (extensibles), c'est à dire

qui ne sont pas paramétrables par leur temps propre couvrant l'intégralité de \mathbb{R} , et avec l'une au moins des extrémités ne buttant pas sur une singularité de courbure. La nécessité de l'introduction de la région intérieure est alors interprétée comme conséquence de l'incomplétude de la solution initiale de Schwarzschild, précisément pour les lignes causales telles que r tend vers r_s quand t vers l'infini. Les systèmes de coordonnées proposés par Eddington [Edd24], Lemaître [Lem25] et d'autres couvrent complètement ces lignes, qui terminent alors sur la singularité de courbure.

La solution complète de Kruskal

La recherche d'une solution du vide de symétrie spatiale sphérique et asymptotiquement plate complète, sans ligne causale extensible, dont une partie s'identifie à la solution de Schwarzschild a abouti à la variété décrite par les coordonnées et la forme métrique de Kruskal-Szekeres, introduite par Synge, puis par Kruskal [Kru60]. La variété lorentzienne ainsi définie est appelée dans ce document l'espace-temps de Kruskal.

Elle se décrit avec comme carte principale, avec la métrique de Kruskal-Szekeres:

$$(T, X, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2, \text{ avec } T^2 - X^2 < 1$$

$$ds^2 = \frac{4}{r} e^{-r} (dT^2 - dX^2) - r^2 d\Omega^2$$

avec r défini par $r > 0$ et l'équation $(1 - r)e^r = T^2 - X^2$

où $d\Omega^2$ la métrique homogène isotrope de \mathbb{S}^2 , et les unités physiques sont choisies telles que $c=1$ et $2GM/c^2 = 1$. Par défaut par la suite, les coordonnées de \mathbb{S}^2 sont $(\theta, \phi) \in]-\pi/2, +\pi/2[\times]0, 2\pi[$.

Cet espace-temps, tout en résolvant la question des lignes causales incomplètes, soulève de nouvelles questions d'interprétation « physique ». Car il inclut non seulement une région extérieure et une région intérieure futur (dont l'interprétation physique est justifiée par d'autres solutions avec effondrement), mais une deuxième région extérieure (dite région III) et une région intérieure passée (notée IV). La région I ($X > 0$ et $T^2 < X^2$) est celle de la solution de Schwarzschild originale, la région II ($T > 0$ et $T^2 > X^2$) est celle de l'intérieur du trou noir (elle contient une singularité future). La région IV ($T < 0$ et $T^2 > X^2$) est le symétrique passé du trou noir, l'intérieur du «trou blanc», et est limitée dans le passé par une seconde singularité. Cette région est nécessaire de par des lignes causales incomplètes issues du passé dans la solution de Schwarzschild, de manière parfaitement symétrique aux lignes causales incomplètes vers le futur dans cette même solution.

Et enfin la région III ($(X < 0 \text{ et } T^2 < X^2)$), qui est une région extérieure aux propriétés identiques à la région I, et dont l'interprétation physique pose problème. Elle n'a aucun événement commun avec la région I, et il n'y a aucune relation causale entre les deux non plus. I.e., il n'y a aucune ligne causale avec une partie dans la région I et une autre dans la région III. Cette région III apparaît comme une sorte de monde parallèle dont les effets sont non observables à partir de la région I.

C'est une source de perplexité quand on analyse la solution en termes de surface de Cauchy. L'espace-temps de Kruskal a une structure causale régulière, elle est « globalement hyperbolique », impliquant en particulier qu'il existe des surfaces de Cauchy, des hypersurfaces spatiales séparant l'espace-temps en une partie passée et une partie future et telles que toute les lignes causales du cône passé de tout événement de la partie future intersectent cette hypersurface. Autrement dit, la partie future est entièrement « causée » par les événements de cette hypersurface.

La perplexité vient de ce que le passé causal d'un événement de la région II comprend aussi bien des événements de la région I que de la région IV et de la région III. En d'autres termes les régions I et III n'ont pas de relation causale entre elles, mais sont causes *ensemble* des événements de la région II, de l'intérieur du trou noir. De même les événements de la région IV (trou blanc) affectent causalement les trois autres régions.

En terme de surface de Cauchy, les hypersurfaces T constant, T étant la coordonnée temporelle du système de coordonnées de Kruskal-Szekeres, sont bien des surfaces de Cauchy, mais contiennent aussi bien des événements de la région I que de la région III (et éventuellement, selon la valeur de T , des événements des régions II et IV).

En termes imagés, si on interprète physiquement la solution comme une approximation d'un effondrement gravitationnel d'une masse, il faudrait imaginer la combinaison précisément agencée d'un effondrement en région I et d'un autre en région III, et ce sans relation causale entre les deux régions. Cela défie toute interprétation physique raisonnable.

De fait, des solutions avec effondrement ont été proposées, avec un extérieur solution du vide, mais avec un intérieur non vide (par exemple [OppSnyd]), et elles sont complètes sans nécessiter l'équivalent de la région III.

Il se trouve qu'il est possible de présenter une solution mathématique avec les régions I, II et IV, mais sans les troublantes région III et pont de Rosen. Cette solution est décrite dans [], et dans [Fri95], sous le nom de $RP^3\mathbb{RP}^3$ geon, francisé ici en géon \mathbb{RP}^3 . On verra d'où vient le nom plus loin.

Le géon \mathbb{RP}^3

La solution part du constat de l'existence d'une isométrie involutive (une bijection interne Φ qui respecte la métrique et telle que $\Phi \circ \Phi$ égale l'identité) sans point fixe de l'espace-temps de Kruskal, et consiste à prendre l'espace quotient par la relation d'équivalence correspondante (c'est à dire $P = Q \Leftrightarrow P = \Phi(Q)$), ce qui donne une nouvelle variété lorentzienne. Cette variété n'est pas simplement connexe, et sa couverture universelle, la couvrant deux fois, est donc l'espace-temps de Kruskal.

Pour comprendre grossièrement le rapport entre les deux variétés, on peut faire le rapprochement avec \mathbb{RP}^2 , le plan projectif réel https://fr.wikipedia.org/wiki/Plan_projectif_reel, ou « bonnet croisé », et sa couverture universelle qu'est la sphère \mathbb{S}^3 .

En coordonnées de Kruskal, l'isométrie est $\Phi : (T, X, \theta, \phi) \longleftrightarrow (T, -X, -\theta, (\phi + \pi) \text{ modulo } 2\pi)$. Elle est C^∞ , et elle respecte la métrique, ainsi que les orientations spatiales et temporelles. Elle n'a aucun point fixe, et groupe donc tous les événements par paires.

En notant Φ a relation d'équivalence, la solution proposée est obtenue par quotientement de l'espace-temps de Kruskal par Φ une construction similaire à celle du plan projectif \mathbb{RP}^2 à partir de la sphère \mathbb{S}^2 et de la symétrie antipodale.

La forme métrique est celle héritée, puisque qu'elle est conservée par la symétrie.

On peut voir cela aussi comme une autre interprétation des coordonnées de Kruskal-Szekeres consistant à ce qu'elles ne soient pas univoques, mais représentent deux fois une variété, une paire symétrique de jeux de coordonnées représentant un même événement.

Description par un atlas

Même s'il est connu [Orbifold] qu'un quotientement d'une variété par une fonction involutive sans point fixe donne une variété, il est utile de la décrire correctement, ainsi que montrer que la métrique est bien définie dans la zone critique qui est $X = T = 0$.

Une description satisfaisante est celle par un atlas, avec la donnée de la métrique. C'est possible en gardant la coordonnée temporelle T ; il s'agit alors essentiellement de donner un atlas des tranches spatiales T constant. Ces tranches sont homéomorphes à \mathbb{RP}^3 moins un point, et on peut donc s'inspirer d'un atlas pour cette variété.

L'espace-temps proposé peut être décrit par un atlas, avec les cartes suivantes (l'atlas

n'est pas complet, il ne couvre pas les « pôles » (I.e., $\theta = \pm\pi/2$), les événements $\theta = \pm\pi/2$; cela se fait simplement en rajoutant la même construction, avec une ligne polaire différente):

Carte principale: $(T, X, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^2$, avec $T^2 - X^2 < 1$

Cartes méridiennes: $(T, X, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-\pi/2, \pi/2[\times]\alpha, \beta[$, avec $T^2 - X^2 < 1$

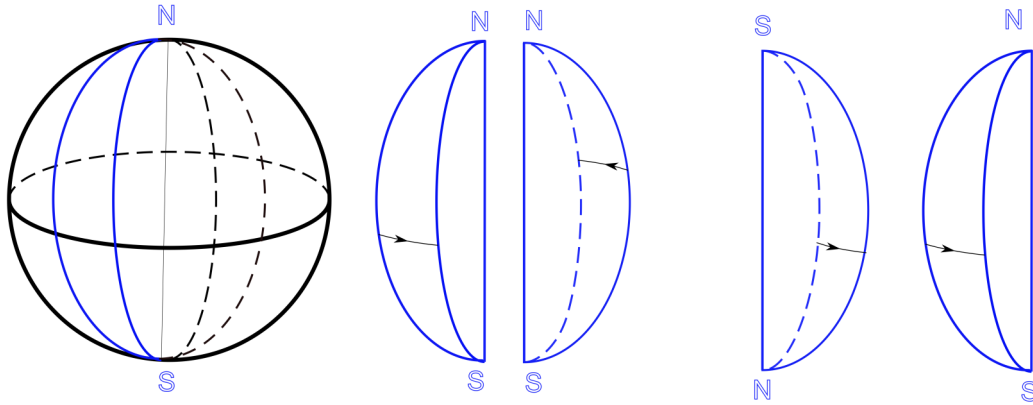
Les cartes méridiennes sont indexées par deux angles (α, β) , avec $0 < \beta - \alpha < \pi$. La collection des cartes méridiennes forme un recouvrement de $(T, X, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi/2, \pi/2[\times [0, 2\pi[$, fermée par intersection finie.

La fonction de transition entre la carte principale et une carte méridienne (notée avec des primes) est: $(T, X, \theta, \phi) = (T', |X'|, \text{sgn}(X')\theta', \phi + 1/2(1 - \text{sgn}(X'))\pi)$.

Pour les cartes du second type (cartes méridiennes): leur intersection (qui est soit vide, soit une carte méridienne); si non vide, la fonction de transition est soit $(T, X, \theta, \varphi) = (T', X', \theta', \varphi')$, soit $(T, X, \theta, \varphi) = (T', -X', -\theta', \varphi' + \pi)$. En particulier, les cartes (α, β) et $(\alpha + \pi, \beta + \pi)$ couvrent le même sous-espace-temps, avec $(T, X, \theta, \varphi) = (T', -X', -\theta', \varphi' + \pi)$.

L'image de la carte principale est un ouvert connexe, et contient tous les événements de l'espace-temps à l'exception de ceux de coordonnées $X = 0$ dans les autres cartes (ainsi que les événement $\theta = \pm\pi/2$). Un événement de coordonnées $(T, 0, \theta, \phi)$ avec $|\theta| \neq \pi/2$, est inclus dans l'intérieur de l'image de toute carte méridienne (α, β) telle que $\alpha < \phi < \beta$.

On peut visualiser la méthode à partir de la représentation « en $1/r$ » de \mathbb{RP}^3 . Une carte méridienne consiste à découper deux secteurs (genre quartiers d'orange) antipodaux, et de les coller l'un à l'autre par la surface externe, après retournement tête-bêche de l'un d'entre eux.



RP3-map.png

La forme métrique a la même expression (celle de la métrique de Kruskal-Szekeres) pour toutes les cartes. Plus précisément, les changements de coordonnées préservent T , X^2 , $d\theta^2$, $\sin^2\theta$, $d\varphi$; ainsi que $dX d\theta$ et donc la forme volumique spatiale $dX d\theta d\varphi$ y compris son orientation.

On a donc exhibé un atlas définissant correctement la variété, avec des systèmes de coordonnées tels que la métrique garde l'expression de la métrique de Kruskal-Szekeres.

La parenté étroite entre la solution proposée (dite par la suite biconnexe, ou géon \mathbb{RP}^3) et l'espace-temps de Kruskal (dit par la suite bi-univers) amène à rappeler les propriétés de cette dernière avant d'étudier celles de la solution biconnexe, en soulignant ce qui est commun et ce qui est différent.

Résumons quelques propriétés marquantes du géon \mathbb{RP}^3 :

- C'est une solution du vide à symétrie spatiale sphérique, asymptotiquement plate.
- La solution est complète, et couvre trois régions séparées par deux horizons: la région extérieure (correspond aux régions I et III de l'espace-temps de Kruskal, et à la solution extérieure de Schwarzschild.), la région II (trou noir) et la région IV (trou blanc). Ces deux dernières hébergent chacune une singularité de courbure.
- la solution n'a pas d'univers parallèle, et donc pas de pont de Rosen (ou trou de ver).
- L'espace obtenu comme coupe spatiale à T constant est homéomorphe à l'espace projectif, \mathbb{RP}^3 , moins un point (l'infini spatial). Il est orientable, mais non simplement connexe (d'où le terme de «biconnexe»).
- La surface obtenue comme coupe spatiale à T et θ constant est homéomorphe au ruban de Möbius (et donc au plan projectif, \mathbb{RP}^2 , moins un point); non orientable.
- Les surfaces (T, X) constants, munies de la métrique induite, sont des sphères munies de la métrique homogène isotrope, sauf pour $X=0$, auquel cas elles sont des plans projectifs munis de la métrique homogène isotrope.

- La solution semble privilégier une valeur particulière de la coordonnée temporelle en coordonnées de Schwarzschild (celle correspondant à $T=0$), contrairement au cas de l'espace-temps de Kruskal, mais à l'instar de solutions d'effondrement. D'un autre côté, la sphère $X=T=0$ est privilégiée dans les deux solutions.

Chaque point mériterait un long développement. Pour garder court ce document, qui vise essentiellement à présenter l'espace-temps proposé, quelques points sont traités à minima ci-après

La symétrie sphérique

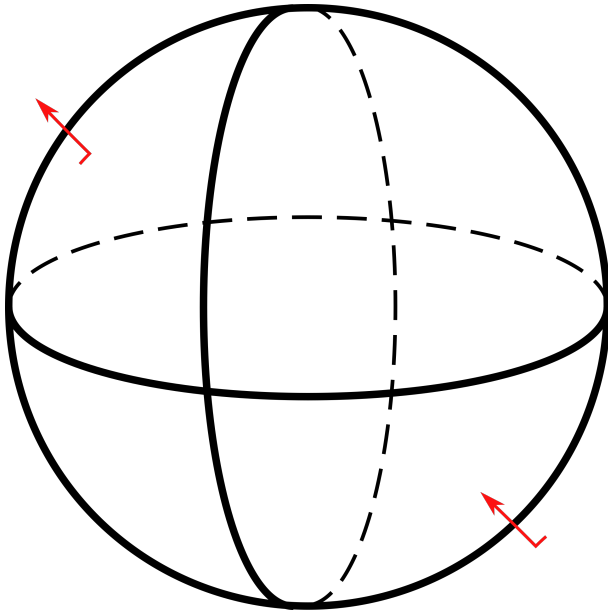
On peut discuter ce que cela signifie exactement. Dans un cas extrême cela peut être vu comme imposant que l'orbite de tout événement par $SO(3)$ est une sphère. C'est le cas pour la solution de Schwarzschild, ainsi que de l'espace-temps de Kruskal. Mais ce n'est pas le cas de l'espace-temps de Minkowski.

Une acceptation plus générale est d'accepter que soit de mesure nul l'ensemble des événements ayant une orbite par $SO(3)$ autre qu'une sphère (cf. par exemple [Carr97]). Les orbites possibles en plus de la sphère sont alors un point unique (cas de l'espace-temps de Minkowski), ou \mathbb{RP}^2 (cas de la solution biconnexe).

L'espace

La notion d'espace dépend d'un choix de coordonnée temporelle. L'espace à T constant est topologiquement \mathbb{RP}^3 moins un point, le point manquant étant l'infini spatial (r ou X tendant vers l'infini). Ceci indépendamment de la valeur de T , ce qui se distingue du cas de l'espace-temps de Kruskal, pour lequel T constant donne un espace déconnecté si $T^2 > 1$.

Une représentation particulière est celle d'une boule sphérique «inversée», le point manquant étant le point central et la surface le centre homéomorphe à \mathbb{RP}^2 ; la distance au centre étant alors r_s/r par exemple. La surface externe se replie sur elle-même, avec une ligne sortante re-rentrant aux antipodes avec une rotation d'un demi-tour autour de la vitesse. Cela peut s'illustrer comme:



rp3.png

L'espace $= X/T$ constant (pareil que t constant en coordonnées de Schwarzschild) a la même topologie.

\mathbb{RP}^3 moins un point est biconnexe, tout comme \mathbb{RP}^2 . Dans la représentation par une boule sphérique, un point peut être relié à lui-même par une ligne traversant la surface une seule fois, et une telle ligne n'est pas contractible.

Instant privilégié

La solution de Schwarzschild est statique, et toutes les valeurs de t sont congruentes. La solution biconnexe privilégie d'une certaine manière une valeur de t . Cela signifie que, pour un extérieur donné, il y a une infinité de manières de le compléter en un espace-temps biconnexe, selon le choix de t . En termes de l'espace-temps de Kruskal, il y a une infinité d'isométries involutives sans point fixe qui peuvent être utilisées. Ce sont celles de la forme $\Phi_\eta : (T, X, \theta, \phi) \longleftrightarrow (\alpha T + \beta X, -\alpha X - \beta T, -\theta, (\phi + \pi) \text{ modulo } 2\pi)$, avec $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ (ou encore $\alpha = \cosh \eta$ et $\beta = \sinh \eta$). Le cas $\eta = 0$ est celui qui a été traité jusque là.

Les lignes t constant

Le quotientement ne respecte pas la dérivabilité des lignes passant par $T = X = 0$.

Dans l'espace-temps de Kruskal, les lignes $X \mapsto (X/v, X, \theta, \phi)$, qui s'écrivent aussi $T \mapsto (T, vT, 0, 0)$, avec θ et ϕ constants, sont continuellement dérivables, de dérivée seconde nulle. Par le quotientement elles deviennent:

$$X \mapsto \begin{cases} \text{si } X \geq 0, (X/v, X, \theta, \phi) \\ \text{si } X \leq 0, (X/v, -X, -\theta, \phi + \pi) \end{cases}$$

Elles sont continues non dérivables en $T = X = 0$.

Par contre, les lignes de l'espace-temps de Kruskal $T \mapsto (T, |vT|, \theta, \phi)$, qui ne sont pas dérivables en $X = T = 0$ deviennent

$$T \mapsto \begin{cases} \text{si } T \geq 0, (T, vT, \theta, \phi) \\ \text{si } T \leq 0, (T, vT, -\theta, \phi + \pi) \end{cases}$$

sont continuellement dérivables, y compris en $X = T = 0$. Ce sont des lignes qui traversent le centre en se continuant «inversées» en la radiale antipodale.

Conclusion, et viabilité

Le géon \mathbb{RP}^3 est, du point de vue mathématique, un espace-temps solution du vide de symétrie spatiale sphérique, qui est une extension complète de la solution de Schwarzschild. Cet espace-temps est différent, plus petit que la variété décrite en coordonnées de Kruskal. Il ne présente pas de second univers, mais a des propriétés particulières, comme des hyperspaces biconnexes, ou un instant privilégié.

Le géon \mathbb{RP}^3 a été l'objet de critiques en « non viabilité ». La notion semble reliée au sens physique d'une solution mathématiquement viable, elle est obscure pour l'auteur, qui ne saurait conclure. On se reportera à [MTW], [San86] et [Fri95], et à d'autres textes que ceux-ci référencent, pour juger de la question