Reformuler le PFD

© Amanuensis

15 avril 2025

Sommaire

Reformulation de la mécanique de Newton

L'idée de modifier le PFD est ancienne. L'advenue des théories modernes de la mécanique (les théories dites, très improprement, de la relativité) a naturellement amener ce questionnement. Elie Cartan a analysé de manière intéressante la question, et a proposé une reformulation,

Ce texte reprend, avec de nombreuses corrections, des messages de l'auteur dans la discussion `https://forums.futura-sciences.com/physique/956675-pertinence-dune-reformulation-p` `html`.

Cas d'un cylindre géant

On va s'intéresser au cas d'un cylindre géant, creux, tournant à vitesse constante, avec une personne debout sur sa face inférieure, et en l'absence de gravitation.

Ainsi il n'y a pas de « poids » (au sens de la gravitation), ni de force tangentielle.

Dans le référentiel du cylindre, la personne placée à la surface intérieure est dans une situation assez comparable à la surface d'une planète, au premier ordre. Et on peut se poser la question de la « physique » que la personne va développer, dont le PFD.

En première approche, la personne va appliquer le PFD classique, comme sur Terre.

Et d'entrée on est confronté avec des difficultés de vocabulaire, en particulier avec Le mot « poids », ainsi que des concepts qui en dérivent comme la verticale, le haut ou le bas, ...

Par analogie, deux forces (et deux seulement) agissent sur la personne, en première analyse.

– une poussée centripète du support;
– une « force centrifuge ».

Cette dernière est nécessaire à cause de la 3ème loi: puisque la personne est immobile, le total des forces doit être nul. Cette force centrifuge est comprise comme l'homologue du poids.

Donc dire qu'elle subit son poids et la force centrifuge est impropre, ou au minimum source de confusion.

La direction centrifuge est l'homologue de la direction du bas.

Intéressons nous maintenant la « force centrifuge », sa « nature » ou sa « cause ».

Le support (la paroi du cylindre) exerce une poussée sur la personne (contact de deux corps ne s'inter-pénétrant pas). Elle est, par géométrie, centripète (simple constat). Par application du PFD, la personne étant immobile dans le référentiel choisi, elle est compensée par une autre force, qui est, par géométrie, centrifuge. Il s'agit de la force de contact, réaction à celle centripète, dont la causalité est la non pénétration entre solides, rien d'autre.

Dès qu'on associe le terme de « force centrifuge » à l'idée de la rotation du cylindre, le terme devient très ambigu, et donc source de confusion!

Autrement dit, la force de réaction est bien géométriquement centrifuge, ce n'est pas du tout la « force fictive » dont il est question dans les référentiels en rotation.

Il y a donc à bien regarder TROIS « forces » à étudier:

– la poussée du support sur la personne (centripète),
– la poussée de la personne sur le support (centrifuge),
– une « force d'inertie » (la « force fictive »), centrifuge.

L'accélération d'entraînement

Donc, dans le cas d'immobilité relativement au cylindre, on a deux forces « non fictives » s'exerçant sur la personne (ou tout objet immobile posé au sol), la poussée verticale du support sur les pieds, et la réaction à cette poussée, c'est à dire la poussée des pieds sur le cylindre. L'une centrifuge, l'autre centripète.

Que faire de la « force centrifuge » au sens « usuel »? Et pourquoi la traite-t-on de « fictive »?

La première remarque est que la formule donnée par la mécanique classique est évidemment correcte, et qu'elle donne une vraie force. Mais il s'agit de la force centripète, changée de signe, la poussée du support! Il s'agit de la force qui entraîne la personne dans le mouvement de rotation, même rôle que tension de la courroie d'une fronde qui fait tourner un projectile.

L'autre, la « force fictive » n'est pas une force. Et cela est lié à la confusion. Une autre terminologie est « accélération centrifuge », ou encore « accélération centrifuge d'entraînement ».

Ce n'est pas une force, et n'a aucune raison de respecter la troisième loi. Et elle ne la respecte pas, l'accélération centrifuge n'a pas de « réaction ». C'est l'une des raisons de la traiter de « fictive »

Comme passe-t-on d'une accélération à l'idée de force (l'idée, pas la chose)? En multipliant par la masse de l'objet. Ainsi, l'accélération est réelle, mais la « force », obtenue par ce calcul, est fictive.

Et si le point de la première partie a été compris, il devrait être clair que la personne ne « ressent » pas la force fictive, mais seulement la poussée sous ses pieds (centripète). Et la réaction des pieds sur support est une force réelle, centrifuge (vers le bas).

Qu'est-ce que cela signifie pour le PFD? Eh bien qu'il faut modifier la deuxième loi, en rajoutant l'accélération d'entraînement, tout en comprenant que ce n'est pas une force. Donc

$$F = m(\dot{v} - P(x))$$

où x est la position (dans le référentiel), v est la vitesse relative au référentiel, $\dot{v}$ sa dérivée coordonnée par coordonnée, ce qu'on présente comme l'accélération relative au référentiel.

P est une accélération dépend du lieu (relatif au référentiel) mais pas de l'objet, et cela ne s'applique que si la vitesse relative au référentiel est nulle, $v = 0$. Le signe négatif est pour le signe positif en faisant passer le terme « à gauche », côté des forces.

Dans un référentiel inertiel, P est nulle partout.

La chute libre

Continuons à travailler en « physicien de paillasse », en expérimentateur, toujours à l'intérieur d'un cylindre tournant, sans gravitation. Après le cas statique (immobilité relativement au cylindre), et avant le cas général, voyons le cas de la chute libre, $F = 0$.

Dans le cylindre comme sur Terre, cela consiste à lâcher un objet initialement immobile. À ce moment initial, le PFD modifié s'applique, $F = m(\dot{v} - P(x)) = 0$, donc

$\dot{v} = P(x)$. L'objet tombe, avec une accélération initiale non nulle, orientée centrifuge (vers le bas). (Plus proprement axifuge, mais gardons la terminologie usuelle.)

L'observation montre que rapidement sa vitesse n'est plus centrifuge, il y a une composante tangentielle. Est donc apparue une composante tangentielle dans l'accélération, et cela demande une modification du PFD.

Il s'agit, dans le cas du cylindre, de l'accélération de Coriolis, mais on va généraliser d'entrée, ce qui évite le calcul du cas particulier d'une rotation pure.

Là encore, on rencontre le concept de « force de Coriolis », mais c'est la même « astuce » que pour la « force centrifuge ». L'accélération est réelle, mais multiplier par la masse m et passer le terme côté force dans le PFD ne « fabrique » qu'une « force » fictive.

D'où vient ce terme tangentiel? L'idée la plus simple est la bonne: de la vitesse relative au référentiel.

Deuxième idée la plus simple, c'est une fonction linéaire de la vitesse. La modification du PFD est alors

$$F = m(\dot{v} - P(x) - C(x, v))$$

Où $v \mapsto C(x, v)$ une fonction vectorielle linéaire en v.

Pour une fonction C particulière (calcul de Coriolis), cela rend compte parfaitement du mouvement de chute libre dans le cylindre.

Généralisation

Le cas étudié est stationnaire, au sens où les champs $P(x)$ et $C(x, .)$ sont constants dans le temps. Cela est homologue au cas sur Terre, mais n'a rien de général. Par exemple cela ne s'applique pas lors du démarrage ou l'arrêt de la rotation du cylindre. La modification est simple :

$$F(t) = m(\dot{v(t)} - P(t, x) - C(t, x, v(t)))$$

$F(t)$ la force réelle, $P(t, x)$ un champ vectoriel d'accélération, $C(t, x, .)$ un champ de fonctions vectorielles linéaires en leur troisième argument, $\dot{v(t)}$ l'accélération relative au référentiel (ou « en coordonnées »).

Les référentiels inertiels ont une caractérisation directe et simple : P et C sont partout et constamment nulles.

Voilà. C'est tout et c'est général. C'est la reformulation recherchée pour le PFD, celle proposée par Èlie Cartan.

Elle ne change rien aux lois de Newton, c'est juste une formulation différente.

Elle a une propriété majeure: elle est formellement stable par changement entre référentiels quelconques, au sens qu'on trouve P' et C' (pour un référentiel) à partir de P et C (d'un autre référentiel) par des formules qu'on obtient à partir des formules de changement de référentiel pour les coordonnés des événements.

Argumentation

Comme cette reformulation ne change rien aux prédictions, quel peut être est son intérêt?

L'argumentation va se diviser en deux parties : en se limitant à la mécanique de Newton, ou en allant plus loin.

Car ce n'était pas vraiment le but d'Élie Cartan que de réécrire Newton. La formulation alternative ne répond pas à un « besoin » criant, preuve en est qu'on continue à enseigner la formulation en terme de forces, qui date de la fin du XVII^{e}, et beaucoup s'en satisfont.

Le but de Cartan est la théorie de la gravitation, et le passage à la relativité générale. Ça, c'est « aller plus loin » ...

Commençons par l'aspect limité.

Comme les approches sont équivalentes quant aux prédictions, les seuls arguments sont subjectifs et portent sur des points non physiques, comme l'enseignement, la clarté conceptuelle, etc.

Je ne vais donc présenter que ma vision, subjective, du sujet.

En gros, je trouve l'approche à la Cartan conceptuellement plus claire, moins source de confusions genre « forces fictives ». Je considère l'approche usuelle (centrée sur la notion de force) datée (fin XVII^{e} ...), et prenant un chemin qui rend l'abord des théories modernes (essentiellement la RG) plus difficile.

Je pense que vu des élèves, elle est aussi simple que l'approche datée.

Par contre elle est plus difficile pour les enseignants, comme à chaque fois qu'il est question de transmission de savoirs: il est plus facile d'enseigner « comme on l'a appris » qu'autrement. C'est assez général, et explique bien d'autres cas dans l'enseignement en général.

Pour moi c'est le passage à la RG, qui ne concerne qu'une toute petite partie des enseignés, qui est l'argument pertinent. Seulement il est assez « élitiste », au sens où justement la RG n'intéresse qu'une minorité, est « difficile à comprendre », et peu (pas?) utile en pratique.

Fin de mon point de vue. Cela laisse place à un débat (constructif si possible), qui ne peut être qu'un débat d'opinions (donc sans conclusion).

La connexion

Caveat lector: Là on passe à la vitesse supérieure, considérer cela comme une « tentative pédagogique », plutôt dense.

L'argument majeur en faveur de l'approche de Cartan pour la mécanique classique est le parallèle avec la Relativité Générale, en ce que cette approche va se centrer sur la notion de « connexion », tout comme la RG.

Pour expliquer cette affirmation, faut introduire la notion mathématique de connexion, en expliquer le rôle et l'importance. Faut ensuite montrer en quoi l'expression du PFD avec les accélérations d'entraînement permet d'y voir l'intervention d'une connexion. Et, troisième point, introduire la gravitation, par une « petite » modification de la connexion.

Connexion et dérivation de quantités vectorielles

Dans l'expression $F = m(\dot{v} - P - C(v))$ (je laisse sous-entendus les arguments x et t, pour alléger), un mathématicien peut reconnaître dans $\dot{v} - P - C(v)$ une *dérivation* de la vitesse v, à un sens d'un concept de dérivation plus large que la dérivation coordonnée par coordonnée. La dérivation invoquée est celle donnée par une *connexion*. On parle de « dérivée covariante ». Notons la D (convention locale à mon texte).

L'approche de Cartan consiste à écrire le PFD $F = mDV$, avec D la dérivation venue d'une connexion particulière, et V « quelque chose » représentant v la vitesse relative au référentiel.

On reviendra plus tard sur cette écriture, concentrons l'explication sur la connexion, sur son rôle, et sur pourquoi introduire un tel concept dont, apparemment, on s'était passé dans l'approche historique.

Le fait mathématique essentiel est qu'**on ne peut pas dériver une quantité vectorielle** (donc on ne peut pas parler de l'accélération d'un mouvement, puisque cela est une dérivée de la vitesse, une quantité vectorielle) **sans impliquer une connexion affine**.

« Avec les mains », une connexion (précisément une « connexion affine ») détermine comment mettre en correspondance (« connecter ») les vecteurs en un point avec ceux en un point infiniment proche. Ce qui permet alors de parler de la modification d'un vecteur en passant d'un point à un autre point infiniment proche, et de là de parler d'une dérivation d'une quantité vectorielle.

Une remarque attendue est alors qu'en mécanique classique on se permet bien de dériver des quantités vectorielles (et en particulier d'utiliser la notion d'accélération de mouvement) sans parler de connexion.

Il se trouve qu'en prenant deux hypothèses, la *géométrie euclidienne spatiale* et le *temps absolu* (deux « hypothèses » considérées au XVII$^{\text{e}}$ siècle plutôt comme des évidences au-delà de tout doute), on a imposé, sans le dire, sans même en avoir le concept, une connexion particulière. Et donc permis de travailler avec la notion d'accélération (entre autres).

La mécanique classique utilise une connexion comme M. Jourdain faisait de la prose...

En bref, une connexion affine est indispensable pour dériver des vecteurs, et donc à toute physique!

La dérivation covariante venant de la connexion est notée ici D. Une fois un référentiel choisi, son expression (appliquée à la vitesse) est de la forme $\dot{v} - P - C(v)$, où $\dot{}$ est la dérivée coordonnée par coordonnée, et on se retrouve avec comme réécriture du PFD

$$F = DV$$

avec V qui a un rapport avec la vitesse, sans être la vitesse.

D est déterminée par la géométrie (par le choix de la connexion), et ne dépend pas du choix de référentiel (ce qui a un rapport avec son nom de « dérivée covariante ») ; par contre l'expression la décomposant en P et C dépend du référentiel, un peu comme la décomposition du champ électro-magnétique en champ électrique et champ magnétique dépend du référentiel alors que le champ électro-magnétique n'en dépend pas.

Dans la mécanique classique, la connexion est celle déterminée par spatial euclidien + temps absolu. Et avec ces idées, Cartan a reformulé les lois de Newton.

Avec une expression du PFD où le seul changement est la définition de la dérivation d'un vecteur!!!

L'espace-temps

Pour qui connaît la formulation générale d'une dérivée covariante, il y a quelque chose qui cloche dans l'affirmation que $\dot{v} - P - C(v)$ soit une dérivée covariante. On s'attend à $\dot{v} - C(v)$. (Car ainsi le deuxième terme rappelle bien les coefficients de Christofell, par sa linéarité en v.) P n'a pas apparemment sa place.

L'explication vient de ce qu'il faut raisonner dans l'espace-temps (en quatre dimensions).

[Intermezzo : J'ai déjà rencontré la remarque comme quoi l'espace-temps, c'est pour les théories modernes de la relativité, que cela n'est pas pertinent pour la mécanique classique.

Mouais. Pour qui regarde bien, il y a plein de « traces » de l'espace-temps en mécanique classique. Je ne prendrai qu'un seul exemple, la première loi de Newton. Je vais la formuler comme suit:

« Il existe un référentiel tel que les mouvements de corps ne subissant aucune influence sont rectilignes uniformes. »

« Rectiligne », ok c'est 3D. Mais que viens faire l'uniformité (longueur de déplacement constante pour une durée donnée) dans l'histoire? Si on dit « un mouvement rectiligne dans l'espace-temps », eh bien, cela inclut exactement l'idée d'uniformité...

Bref, la première loi parle bien de ligne droite dans l'espace-temps...]

Revenons au sujet. Notons V la vitesse en 4D. Avec l'hypothèse de temps absolu, le terme temporel dans la vitesse « en 4D » est égal à 1 (dt/dt = 1). Il est constant. Donc on peut écrire $V = (1, v)$. Autre conséquence, le terme temporel de l'accélération est nul (quelle que soit la notion de dérivation que l'on va appliquer), on va garder l'écriture F. Autre conséquence, la notion de fonction linéaire de la 4-vitesse $(1, v)$ s'écrit bien $P + C(v)$, où P ne dépend pas de la vitesse. C'est le passage dans l'espace-temps qui amène le terme P, qui correspond aux coefficients de Christofell temporels.

Reprenons. Voir une dérivée covariante dans $\dot{v} - P - C(v)$, avec C linéaire en son argument marche en 4D, sous la forme $\dot{V} - C_4(V)$. La connexion dont il est question n'est pas celle de la géométrie spatiale, mais celle de la géométrie de l'espace-temps. C'est bien ce que présente Cartan, ce qui va très bien dans le sens d'un rapprochement avec la RG.

Si on écrit avec les arguments t et x, on constate que cela correspond à un événement (un point en 4D), notons le X. On obtient pour la dérivation l'expression pleinement 4D :

$$\dot{V} - C_4(X, v)$$

Ainsi P et C, la décomposition de C_4 une fois choisi un référentiel, dépendent de l'événement, en 4D.

Reprenons les lois de Newton, dans les termes de ce qu'on appelle l'approche Newton-Cartan.

Loi 0 : On postule un espace-temps muni de la connexion affine conforme aux hypothèses de géométrie spatiale euclidienne et de temps absolu

Loi 1a (loi de l'inertie) : Les mouvements de corps non influencés par d'autres sont des *géodésiques* de la connexion.

Loi 1b (application de 1a au cas de la loi 0): Il existe des référentiels où la dérivée covariante se réduit au premier terme (dérivation en coordonnées), soit $\dot{V}$ pour la vitesse, et où, donc, les géodésiques se présentent comme $\dot{V} = 0$, c'est à dire des mouvements rectilignes uniformes.

Loi 2 : Le PFD, qui s'écrit $F = mDV$, avec F et V des quantités vectorielles 4D, avec comme termes temporels resp. 1 pour V, et 0 pour F, les termes spatiaux étant ceux usuels. D est la dérivée covariante définie par la connexion affine.

Loi 3 : inchangée

Voilà. Voilà la reformulation à la Cartan de la mécanique classique, valable pour tout référentiel et tout systèmes de coordonnées.

Ce qui est génial, c'est que seule la loi 1b est spécifique à la mécanique classique (et plus précisément vient de la connexion, qui est spécifique à la mécanique classique). Les autres lois s'appliquent aussi à la RG (avec quelques bémols), seule la connexion diffère.

On est arrivé au bout. Euh, non, un aspect résiste encore, la gravitation. Tout le récit pour le moment a été « en l'absence de gravitation ».

La gravitation et les connexions

Jusque là, l'étude était en l'absence de gravitation, et partait du cas d'un cylindre creux géant, tournant à vitesse constante, amenant une situation stationnaire. Une personne à la surface interne perçoit cette situation de manière assez similaire à nous sur la Terre. Cela a servi de base pour une formulation des lois de la mécanique mettant en avant la notion de connexion, à la Cartan.

Newton a formulé un autre aspect de la mécanique classique, la gravitation universelle.

Prenons le cas simple d'une chute libre, un corps soumis à la seule gravitation. C'est le cas (en très bonne approximation) de la Lune, du Soleil, des corps célestes en général, des sondes spatiales, des satellites artificiels, de l'ISS, ...

La théorie de Newton présente la gravitation comme une force. Elle apparaît comme une force standard, sans raison immédiate de la traiter comme une « force fictive ». En particulier elle respecte parfaitement la troisième loi, l'action et la réaction.

Dans un référentiel inertiel (le référentiel héliocentrique en est une très bonne approximation), le PFD pour la chute libre s'écrit $G = m\dot{v}$, avec G la force de gravitation. Aucun problème, pas de source de confusion.

Maintenant, la gravitation a la particularité de dépendre linéairement de la masse, et on peut écrire $mG(t,x) = m\dot{v}$ avec $G(t,x)$ un champ « universel », ne dépendant pas du corps, seulement du lieu x et de l'instant t (donc de l'événement).

Il s'agit d'un champ d'accélérations. Une chute libre se réécrit $0 = m(\dot{v} - G(t,x))$, ce qui rappelle évidemment la formulation obtenue « sans gravitation ».

On peut regrouper des termes, avec comme PFD $F = m(\dot{v} - G(t,x) - P(t,x) - C(t,x,v))$.

Cas sans gravitation: $G = 0$.

Cas référentiel inertiel: P et C partout nulles.

Peut-on voir là une approche « à la Cartan », fondée sur une connexion?

La réponse est oui, et les conséquences énormes. Étudions donc cette approche.

L'approche consiste à voir $\dot{v} - G(t,x) - P(t,x) - C(t,x,v))$ comme $\dot{V} = D(X)V$, l'application d'une dérivée covariante à la vitesse en 4D, cette dérivation découlant d'une AUTRE connexion que celle pour reformuler la mécanique classique, la différence étant dans les coefficients de Christofell temporels.

Cela ne modifie que deux « lois », la 0 et la 1b. Or la 1b n'est que l'application de la loi 1a une fois la connexion définie, donc au fond seule la « loi 0 » est changée, selon

Loi 0' : On postule un espace-temps muni de la connexion affine conforme aux hypothèses de géométrie spatiale euclidienne et de temps absolu, et incluant le champ d'accélération de la gravitation universelle.

Ce n'est pas le modèle de Newton, mais est équivalent à la mécanique de Newton incluant la gravitation universelle, au sens d'amener les mêmes prédictions. D'un point de vue épistémologique le choix entre l'une ou l'autre est arbitraire, une question de convention, ou même d'opinion.

Les différences qualitatives et interprétatives ne sont pas négligeables. Voyons quelques aspects.

La « force gravitationnelle » entre dans la catégorie des « forces fictives » (accélération vue comme force par multiplication par la masse), attribuable à l'inertie. Sur Terre, on peut considérer que la seule force exercée sur une personne immobile est la poussée vers le haut par le support. Ce qui au passage indique que l'espace-temps dans ce modèle est « courbe », non plat.

La « loi 1b » est différente: les mouvements « inertiels », pour $F = 0$, sont les mouvements de chute libre (ce sont les géodésiques de la nouvelle connexion). Il n'existe pas de référentiel tel que ce sont des « mouvements rectilignes uniformes ».

Le terme $G(t, x) + P(t, x)$ s'interprète comme l'accélération de la [B]pesanteur[/B]. Comme P, elle dépend du référentiel. Dans le référentiel du cylindre tournant hors gravitation, cela se réduit à $P(t, X)$, qui était vu comme la « force centrifuge ». Une personne réfléchissant en termes de phénomènes (i.e., ce qu'elle observe), et non de causes, y voit la pesanteur. Dans le référentiel de l'ISS, $P + G = 0$, c'est une situation d'impesanteur (ou d'apesanteur). En calibrant bien le mouvement d'un avion, on peut obtenir temporairement une situation (dans le référentiel de l'avion) similaire d'apesanteur, $P+G = 0$, ce sont les « vols 0 g ».

Dans le référentiel tournant qu'est le référentiel terrestre, la pesanteur est bien la somme de G (attraction gravitationnelle de la Terre) et d'un terme P (accélération d'entraînement centrifuge due à la rotation de la Terre) d'amplitude plus faible mais non nulle.

Etc. D'un point de vue phénoménologique, la décomposition $G + P$ n'est pas possible au premier ordre, la notion de pesanteur se présente pareil aussi bien dans le cylindre tournant que sur Terre (d'où une perception similaire pour les personnes sur Terre et sur la surface interne du cylindre tournant).

Bref, l'approche « à la Cartan », modifiée pour inclure la gravitation dans la connexion, marche très bien. Mais bouscule pas mal les idées usuelles, véhiculées par la mécanique de Newton telle qu'enseignée.

Cette approche a un avantage particulier, elle supprime tout besoin d'un « principe d'équivalence », qui apparaît alors ne remplir qu'un besoin artificiel créé par le choix de l'approche « à la Newton ». Ou plutôt le remplace par des considérations épistémologiques sur l'inertie et plus généralement la physique, sujet passionnant, mais développés dans un autre texte.

Et, cerise sur le gâteau, la RG s'obtient juste en prenant une connexion dufférente... Ce qui était en fait le but de Cartan.

On a donc une approche fédérant trois « théories » avec des PFD subtilement différents: celle des trois lois de Newton (les mouvements d'inertie sont des lignées droites dans des référentiels particuliers) ; celle modifiée pour inclure la gravitation de Newton (les mouvements d'inertie sont les chutes libres) ; et la RG (la métrique est différente, et les mouvements d'inertie sont là aussi les chutes libres).

Dans le premier cas on peut voir la connexion comme liée à des considérations métriques: espace euclidien = métrique euclidienne, et temps absolu = métrique dégénérée ($dt^2 = 0$). De même, en RG on peut relier la connexion à la métrique (de Minkowski).

Mais la théorie classique+gravitation universelle semble faire exception : à ma connaissance, la connexion ne dérive pas de considérations métriques. C'est ce qui m'amène (avec d'autres arguments) à adopter le point de vue que la connexion est « première » plutôt que la métrique. Et donne toute son importance au concept de connexion, et donc à l'approche d'Elie Cartan.