Représentations planes de la géométrie de Schwarzschild

©Amanuensis

> 2017/02/17

Table des matières

Introduction

Le contexte est l'étude de la solution de Schwarzschild au problème en Théorie de la Relativité Générale, d'un espace-temps vide de symétrie spatiale sphérique, asymptotiquement confondable avec l'espace-temps de Minkowski.

Ce texte étudie quelques aspects des représentations de la solution par des cartes planes, suivant les coordonnées de Schwarzschild et celles de Kruskal-Szekeres. Les points saillants sont principalement une représentation des cartes de Schwarzschild différente de ce qu'on voit le plus souvent, prenant en compte la différence conceptuelle des coordonnées de Schwarzschild selon qu'elles sont utilisées pour l'extérieur ou l'intérieur ; la relation entre les cartes de Schwarzschild et la carte de Kruskal-Szekeres. Comme souvent, le problème principal est l'horizon, que les cartes de Schwarzschild ne permettent pas de bien comprendre ; et le statut de ce qui appelé dans ce texte le « centre », cette surface un peu méconnue mais si spéciale dont les coordonnées de Kruskal-Szekeres sont X=T=0.

Les deux premières sections sont plus générales que la géométrie de Schwarzschild; première section couvre des rappels mathématiques sur les coordonnées, la deuxième des réflexions sur les représentations planes de l'espace-temps.

Les deux autres sections s'intéressent la troisième aux cartes de Schwarzschild, la quatrième à celle de Kruskal-Szekeres, avec un accent important sur la comparaison entre les deux, sur la base d'une représentation particulière pour les cartes de Schwarzschild, obtenue dans la section sur les cartes de Schwarzschild.

Rappels sur les coordonnées en géométrie différentielle

L'espace-temps et de nombreux autres espaces en physique sont modélisés par des variétés différentielles, ce qui permet d'utiliser les outils mathématiques proposés par la géométrie différentielle.

L'un de ces outils est les systèmes de coordonnées. Si certaines de leurs applications sont bien plus anciennes que leur formalisation, et si le concept peut paraître intuitif, il est utile d'en rappeler quelques aspects formels, tels que présentés par la géométrie différentielle.

Système de coordonnées

Si E est une variété sans bord de dimension n (4 pour l'espace-temps), un système de coordonnées (ou *carte*) est une bijection différentiable (un difféomorphisme) entre un *ouvert* de E et un *ouvert* de $\mathbb{R}^n$. Cette limitation à des ouverts est essentielle dans la suite. Pour des raisons pratiques, on se limite à des ouverts connexes.

On appellera dans ce texte « domaine de validité », ou « domaine de définition », ou « ouvert de définition » (de la carte) l'ouvert de $\mathbb{R}^n$, et « région » (de la variété) l'ouvert de E image du domaine par la bijection.

Il est courant qu'une carte ne couvre pas toute la variété. On appelle *atlas* un ensemble de cartes tel que tout point de la variété a un voisinage couvert par au moins une carte, et tel qu'il existe un changement de carte différentiable entre cartes dans l'intersection de leurs régions.

La forme métrique

Ce qui précède concerne les variétés différentielles sans bord en général. Le sujet étant l'espace-temps, l'intérêt se porte sur les variétés différentielles sans bord munie d'une « forme métrique » (forme différentielle bilinéaire symétrique non dégénérée). Une contrainte supplémentaire est demandée pour qu'un système de coordonnées soit acceptable: que la forme métrique puisse s'exprimer en tout point comme une fonction differentiable des différentielles des coordonnées.

> Une carte est alors typiquement décrite par la liste des coordonnées, l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ parcouru par les coordonnées, et la formule exprimant la forme métrique en fonction des différentielles des coordonnées.

C'est là le point principal de ces rappels, en soulignant que la donnée de l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ est nécessaire ; cela va jouer un rôle important pour l'étude des cartes.

Dans le cas d'un modèle d'espace-temps, la forme métrique a pour signature $(1, n-1)$, n étant la dimension.

Coordonnées étendues

Il arrive souvent qu'on puisse étendre les coordonnées à un sous-ensemble non ouvert de $\mathbb{R}^n$, de façon à ce que l'on obtienne une application (non nécessairement injective) allant de ce sous-ensemble à la variété, et qu'elle soit continue. De telles coordonnées restent utilisables à fin d'étiquetage, pour repérer des points de la variété, mais « à la limite » de la région de la variété couverte par l'ouvert de définition. Ces coordonnées étendues doivent être utilisées avec précaution, car elles n'ont pas toujours des propriétés permettant de les utiliser pour autre chose que le simple étiquetage, principalement parce qu'on n'a pas de correspondance entre des voisinages dans la variété des points ainsi étiquetés et des voisinages de ses coordonnées dans $\mathbb{R}^n$.

On parlera de « points frontaliers » à une carte pour les points qu'on peut référencer par des coordonnées étendues mais pas par des coordonnées du système propre.

Il est important de noter les conditions. Un jeu de coordonnées doit désigner un seul point de la variété ; et des chemins continus de coordonnées prises dans l'ouvert de définition et convergeant vers un même jeu de coordonnées étendues doivent avoir leurs images dans la variété convergeant en un même point de la variété (limite de coordonnées et coordonnées de limite doivent correspondre).

A contrario, seule la continuité des lignes elles-mêmes est demandée. Il n'y a aucune garantie pour les limites de fonctions le long d'une ligne aboutissant à un point frontalier. Par exemple les dérivées de lignes paramétrées aboutissant à un même point frontalier peuvent être différente ; en d'autres termes, il se peut qu'on ne puisse pas exprimer l'espace vectoriel tangent d'un point frontalier en utilisant le système de coordonnées.

Un exemple de points frontaliers est les pôles d'une sphère représentée par une carte de Mercator. Le domaine de définition exclut les latitudes de $\pm 90°$, mais ces valeurs peuvent être incluse dans une extension, pour étiqueter les pôles. Dans cet exemple, il y a une infinité de jeux de coordonnées étendues pour étiqueter les pôles, on obtient sur la carte une ligne représentant un point de la sphère.

Un exemple, les coordonnées polaires du plan euclidien

On va prendre un exemple, connu, mais peut-être pas suffisamment bien connu, pour illustrer cela et quelques difficultés courantes.

Le plan euclidien $\mathbb{E}^2$ est une variété de dimension deux, dont des systèmes de coordonnées sont les systèmes cartésiens, le domaine de définition étant $\mathbb{R}^n$ et la forme métrique $dx^2 + dy^2$. Une telle carte est un atlas à elle seule, l'ouvert couvert par les coordonnées est tout le plan. Un autre système de coordonnées usuel est celui des coordonnées polaires. On le présente comme (r, φ), le plus souvent sans préciser le domaine de définition, avec comme forme métrique $dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

On pourrait prendre comme valeurs acceptables de coordonnées $0 \leq r < \infty$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Il s'agit au mieux alors de coordonnées étendues, puisque la partie correspondante de $\mathbb{R}^2$ n'est pas un ouvert (et c'est visiblement non bijectif, les coordonnées (0, 0) et (0, π) représentent le même point, de même que (1, 0) et (1, 2π)).

Le système doit donc être décrit plus précisément, en donnant l'ouvert de définition; on peut prendre par exemple $0 < r < \infty$ et $0 < \varphi < 2\pi$. On voit alors que cela ne couvre pas tout le plan, il manque un rayon partant du centre et le contenant (ce qui correspondrait à r$\geq$ 0 et φ=0): conclusion, un système de coordonnées polaires ne forme pas un atlas à lui seul.

Les points manquants sont néanmoins des points frontaliers pour l'extension des coordonnées à $0 \leq r < \infty$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Les points référencés par φ=0 et r>0 ne posent pas trop de problème, ils ont deux jeux de coordonnées, mais le passage à la limite des dérivées se passe bien. Par contre, le centre, défini par r=0 est singulier pour les coordonnées polaires. Non seulement, il est référencé par une infinité de jeux de coordonnées, mais les passages à la limite s'y passent mal, ce qu'on peut voir en considérant une ligne droite continue passant par le centre. Lors du passage en r=0 la coordonnée φ passe de manière discontinue de φ=α à $\varphi = ((\alpha + \pi)$ modulo $2\pi)$, et les coordonnées de la dérivée (qui se présente comme $a\partial_r$ avec a un réel non nul) ne convergent pas sur la même valeur selon le côté de la ligne (les valeurs sont opposées).

On peut ajouter un second système de coordonnées polaires, par exemple 0 < r < ∞ et -π < φ < π. Dans le domaine couvert en commun, le changement de coordonnées est affine, c'est r=r', φ=(φ' modulo 2π), facile à manipuler. Mais cela laisse encore le centre en dehors des cartes. On peut évidemment obtenir un atlas en ajoutant n'importe quel système couvrant le centre correctement, mais cela ne sera pas un système de coordonnées polaires ayant ce point comme centre, car le centre est singulier pour tous ces systèmes.

Complétude des lignes d'espace-temps

Le point abordé dans cette section est spécifique aux modèles d'espace-temps (variété différentielle munie d'une forme métrique de signature (1,3)), pour lesquels on peut distinguer le genre des vecteurs.

Une analyse particulière consiste à s'intéresser aux limites dans $\mathbb{R}^n$ ou $\overline{\mathbb{R}}^n$ des coordonnées de lignes d'Univers ou de lignes de genre lumière. La question est alors si le fait que la ligne « butte » sur des valeurs limite de coordonnées est intrinsèque à la ligne, ou si au contraire la ligne est extensible au sens où elle pourrait éventuellement s'étendre au-delà dans la variété, l'extension apparaissant alors sur une autre carte d'un atlas de la variété.

Quand la limite est un point frontalier pour une extension de coordonnées, la ligne est extensible. (Car il existe une carte où le point frontalier est couvert correctement, donc y a un voisinage complet, d'où une prolongation.)

Quand une ligne n'a pas sa limite en un point frontalier, elle n'est pas extensible si elle y arrive en temps propre infini. Dans le cas contraire, c'est à dire si la durée propre entre un événement de la ligne dans la carte et cette limite est finie, l'extensibilité n'est pas toujours possible (par exemple elle ne l'est pas si la limite est à une singularité de courbure), l'étude se fait au cas par cas (de même pour toutes les lignes de genre nul).

Ces idées se généralisent à un ensemble de cartes, et un tel ensemble est complet quand aucune ligne d'Univers n'est extensible. L'espace-temps décrit par l'atlas ainsi obtenu est alors « complet », il n'a pas ligne extensible.

On aura remarqué que ne sont pas prises en compte les lignes de genre espace, ce qui n'est pas la définition la plus générale (qui demande la non extensibilité de toutes les géodésiques, en plus de toutes les lignes d'Univers). Le sens physique, lié à la causalité, est clair pour les lignes de genre temps ou lumière, mais rien de tel ne s'applique aux autres lignes. L'extension ou non des lignes causales est du coup le premier point à regarder.

Généralités sur les représentations de cartes

[À faire]

Représentations bornées

Dans le cas d'une représentation en 2D d'une coupe en 2D de l'espace-temps, la visualisation des limites est aisée si le domaine de définition est borné. Les diagrammes de Penrose sont un exemple de cette approche.

Les coordonnées de Schwarzschild

L'espace-temps de Schwarzschild est présenté le plus souvent avec les coordonnées de Schwarzschild. Cette section s'intéresse aux représentations des cartes utilisant ces coordonnées.

Les coordonnées de Schwarzschild comprennent une composante temporelle t, et des coordonnées sphériques de $\mathbb{R}^3$, notées (r, θ, φ) avec la forme métrique :

$$(1 - \frac{R}{r})dt^2 - (1 - \frac{R}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

où R (le rayon de Schwarzschild) est un paramètre homogène à une longueur. (c=1, par convention.)

Voyons le domaine de définition. Aucune contrainte ne portant sur t, on va considérer que cette coordonnée parcourt tous les réels.

θ et φ venant des coordonnées sphériques, on peut prendre comme intervalles]-$\pi/2$, $\pi/2$[et (par exemple)]0, 2π[. Plus fondamentalement, (θ, φ) est un système de coordonnées de $\mathbb{S}^2$ (la sphère en tant que surface), et pourrait être remplacé par tout autre système de coordonnées de $\mathbb{S}^2$ sans affecter les autres coordonnées. Pour ne pas traîner les problèmes spécifiques aux coordonnées de $\mathbb{S}^2$, on note Ω un atlas de S^2, et on notera dΩ^2 la métrique homogène isotrope de $\mathbb{S}^2$. La métrique de l'espace-temps est alors notée (abusivement):

$$(1 - \frac{R}{r})dt^2 - (1 - \frac{R}{r})^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2$$

La coordonnée r présente une difficulté. L'examen montre que la forme métrique n'est pas définie pour r=R. On a donc *deux* domaines de définition *disjoints*, r>R et r $\in$]0, R[, couvrant des régions disjointes, c'est à dire deux cartes indépendantes. Parce qu'on définit une carte par un ouvert de R^n, il n'y a pas de point de l'espace-temps qui soit couvert par les deux cartes. Selon les principes présentés précédemment, on doit considérer qu'il y a *deux* systèmes de coordonnées de Schwarzschild, deux cartes qui doivent être étudiées et présentées séparément.

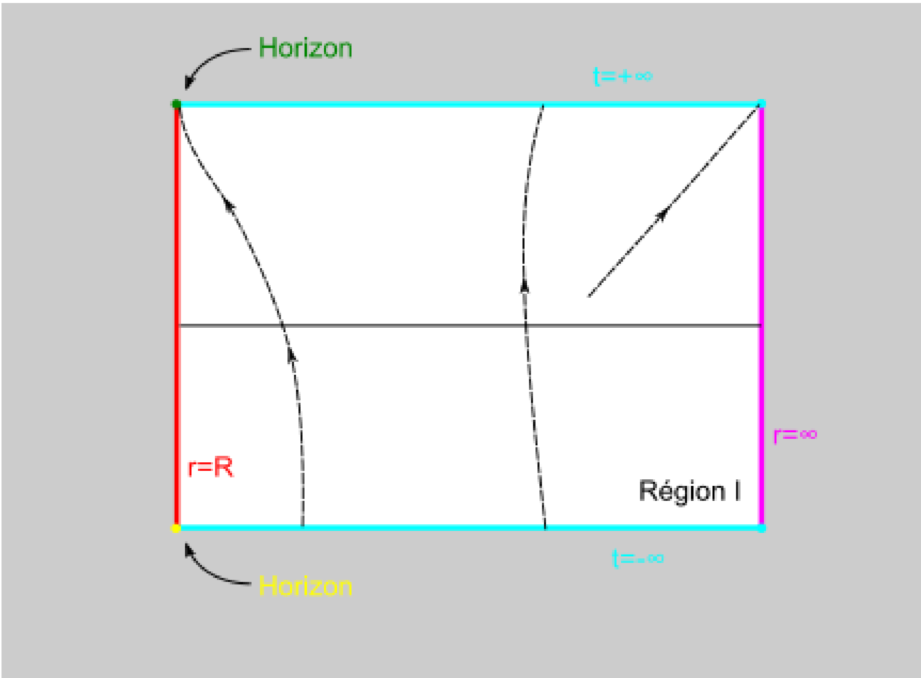
La première région, pour r>R est la région « extérieure », la deuxième, pour r $\in$]0, R[, est usuellement présentée comme la région « intérieure » du trou noir. Les deux régions sont étudiées séparément, chacune avec sa carte de Schwarzschild.

La région extérieure

La carte pour la région extérieure, avec r parcourant]R, ∞[, ne pose pas de problème particulier.

Les limites en r et t

Une représentation bornée d'une tranche (θ, φ) constants permet de visualiser les limites.



SchwK-I.png

L'ouvert de validité est en blanc. Les lignes pointillés représente des mouvements radiaux.

Une partie des limites est celle des infinis temporels (t tendant vers $\pm\infty$—écrit abusivement t=$\pm\infty$), et r ne tendant pas vers R, en cyan. Ces points sont des limits de lignes d'Univers, qui ne sont pas atteintes en temps propre fini ; par exemple les lignes d'immobilité t $\mapsto$ (t, r, θ, φ), avec r, θ, et φ constants caractérisant chaque ligne. La limite n'étant pas atteinte en temps propre fini, elles ne sont pas extensible au-delà.

L'infini spatial, $r \rightsquigarrow \infty$ et t restant fini, en magenta, n'est pas l'aboutissement d'une quelconque ligne d'univers ou lumière.

Jusque là, il s'agissait de limites ayant leur pendant dans l'espace-temps de Minkowski, à laquelle tend asymptotiquement la solution quand $r \rightsquigarrow \infty$.

Il reste les cas où r tend vers R.

Pour $r \rightsquigarrow R$ et $r \rightsquigarrow \pm\infty$ simultanément (points vert et jaune), on peut montrer qu'ils sont atteints en temps propre fini par certaines lignes d'Univers. Ces lignes sont extensibles, et représentent les mouvements radiaux passant de l'extérieur vers l'intérieur, ceux qui « traversent l'horizon ». Ces points sont frontaliers pour des coordonnées bornées étendues, on verra qu'ils représentent chacun une ligne de la variété dans une coupe à (θ, φ) constants, et non un événement unique, chaque ligne étant un des *horizons*.

La partie r=R, t fini, en rouge, est très spéciale, et mérite une étude particulière, qui est difficile à mener sur la base des coordonnées de Schwarzschild. Néanmoins on peut constater qu'aucune ligne d'univers ou lumière de la région n'y aboutit: la question de l'extensibilité de lignes de genre temps ou nul y aboutissant ne se pose pas. Donnons la conclusion: ces coordonnées sont frontalières, et, pour (θ, φ) fixés réfèrent au même événement quel que soit t. Dans une représentation (t, r) les points correspondant forment une ligne mais ne réfèrent qu'à un seul événement, comme un pôle sur une carte de Mercator. Ces points ne font pas partie de l'horizon au sens où aucune ligne d'univers de la région n'y aboutit. Leur statut physique n'est pas clair à ce stade, et sera clarifié en utilisant un autre système de coordonnée, les couvrant proprement. Pour des raisons qui seront exposées plus loin, on va appeler l'ensemble des événements référencés en coordonnées étendues par $t = 0$, x fini, le « centre ».

La région intérieure

L'examen de la métrique de Schwarzschild avec r<R permet de détecter une difficulté de taille: la coordonnée notée usuellement t est spatiale (le coefficient dans la métrique de dt^2 est du signe majoritaire) et celle notée r est temporelle (dr^2 a un coefficient du signe minoritaire). Pour éviter les risques d'incompréhension (et contrairement à l'usage, peut-être bien établi, mais conceptuellement mauvais, comme ce texte va le montrer), on va adopter une notation conforme au sens physique usuel des lettres t et x (dénotant resp. une coordonnée temporelle et une coordonnée spatiale). Le système de coordonnées est alors noté (t, x, θ, φ) avec les connotations *physiques* qu'on y voit naturellement, et la forme métrique se réécrit alors comme

$$(\frac{R}{t}-1)^{-1}dt^2-(\frac{R}{t}-1)dx^2-t^2d\Omega^2$$

Le domaine de définition de t est alors]0, R[. La métrique tend vers une formule dégénérée quand t tend vers 0, et un calcul montre que la courbure diverge (précisément, le scalaire de Kretschmann tend vers l'infini, soit une « courbure infinie »). Il s'agit d'une singularité de courbure, indépendante du choix de coordonnées.

Un petit détail cloche: avec la forme métrique donnée, la singularité est dans le passé de la région ; cela décrit donc le trou blanc, et non le trou noir. Pour ce dernier, singularité dans le futur, il est nécessaire de changer le signe de t, pour rester dans le cadre des conventions générales de notation. Pour différentes raisons, on va prendre R-t comme coordonnée temporelle, qui parcourt alors toujours]0, R[. La métrique devient:

$$(\frac{R}{t}-1)dt^2-(\frac{R}{t}-1)^{-1}dx^2-(R-t)^2d\Omega^2$$

θ et φ sont, comme avant, des coordonnées de $\mathbb{S}^2$.

La coordonnée x parcourt apparemment tout $\mathbb{R}$ (ce qui justifie l'écriture x à la place de r). Rien ne s'y oppose, et c'est ce qui est décrit dans les présentations usuelles.

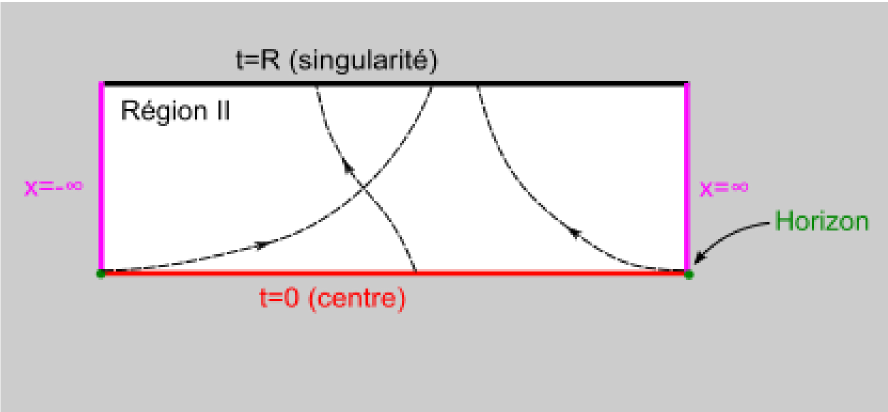
Un point important est que x ne peut pas s'interpréter comme un rayon comme dans des coordonnées sphériques. Le rayon au carré d'une sphère spatiale pour x et t constants, θ et φ variables, est le coefficient de dΩ^2 dans la métrique, et ce coefficient ne dépend pas de x. On va noter ρ ce rayon; plus physiquement [1], ρ est la valeur telles que $4\pi\rho^2$ est l'aire de la surface x et t constants, θ et φ variables. On a $\rho = R - t$, variant donc entre les limites 0 (à la singularité) et R. Ce rayon ne s'annule nulle part, et une tranche spatiale n'a pas de centre spatial pour la symétrie sphérique.

Au final, on aurait une variété correspondant à $]0, R[\times\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$. Topologiquement, ce n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}^4$, mais à $\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}^2$. Si cela n'est pas aisé à visualiser, on peut par analogie penser à un espace-temps 3D où les tranches spatiales seraient $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$, ce qui est un cylindre ou un cône sans son sommet.

Dans la région intérieuree, toutes les lignes d'univers aboutissent à la singularité quand t tend vers R. Et elles ont toutes une durée propre finie dans la région. L'origine de ces lignes est dans tous les cas sur la limite $t = 0$, aussi bien en x fini qu'en x tendant vers un infini.

1. Parler de rayon est impropre ; si on cherche une longueur, $2\pi\rho$ est la longueur de la ligne spatiale $\lambda\mapsto(t,x,\theta,\lambda)$ avec λ parcourant l'ouvert de définition de ϕ, à t, r et θ constants.

En représentation bornée, une coupe à θ et φ constants, la région intérieure en coordonnées de Schwarzschild se présente comme suit:



SchwK-II-v2.png

L'orientation a été choisie pour conserver le temps en ordonnées et l'espace en abscisses.

Comme dans les autres figures, le domaine de définition est l'ouvert de fond blanc, et les lignes pointillées montrent des mouvements radiaux. La singularité est montrée en noir, en $t = R$. On trouve deux infinis spatiaux, en $x = \pm\infty$ et $t \in]0, R[$, représentés en magenta. Comme l'infini spatial dans la région extérieure, cela ne représente pas des aboutissants de ligne d'univers.

La ligne $t = 0$ et x fini est représentée en rouge, et est le pendant de la ligne $r = R$ du domaine extérieur. Ce sont les coordonnées de points frontaliers, indépendamment de x, les mêmes que pour la ligne correspondante pour la carte extérieures, c'est à dire le centre ; précisément, (., R, θ, φ) sur la carte de la région extérieure réfère au même événement que (0, ., θ, φ) sur la carte de la région intérieure. Les propriétés du centre vues de la carte intérieure sont cependant différentes. La principale est que ses points sont tous des aboutissants de lignes d'Univers, et ce en durée propre finie: ces lignes sont extensibles, mais, point très important, pas dans la région extérieure.

Les deux points en vert sur la carte, en $t = 0$ et x tendant vers un infini, sont particuliers. Ils ne correspondent pas à des points frontaliers (comme la ligne rouge), mais sont des limites de lignes d'univers (ce qui les oppose à la ligne magenta): comme pour la carte de Schwarzschild de la région extérieure, ces points ne représentant pas un événement unique dans la coupe à θ et φ constants, mais une ligne d'événements. Leur statut est clarifié plus loin.

Connexion entre intérieur et extérieur

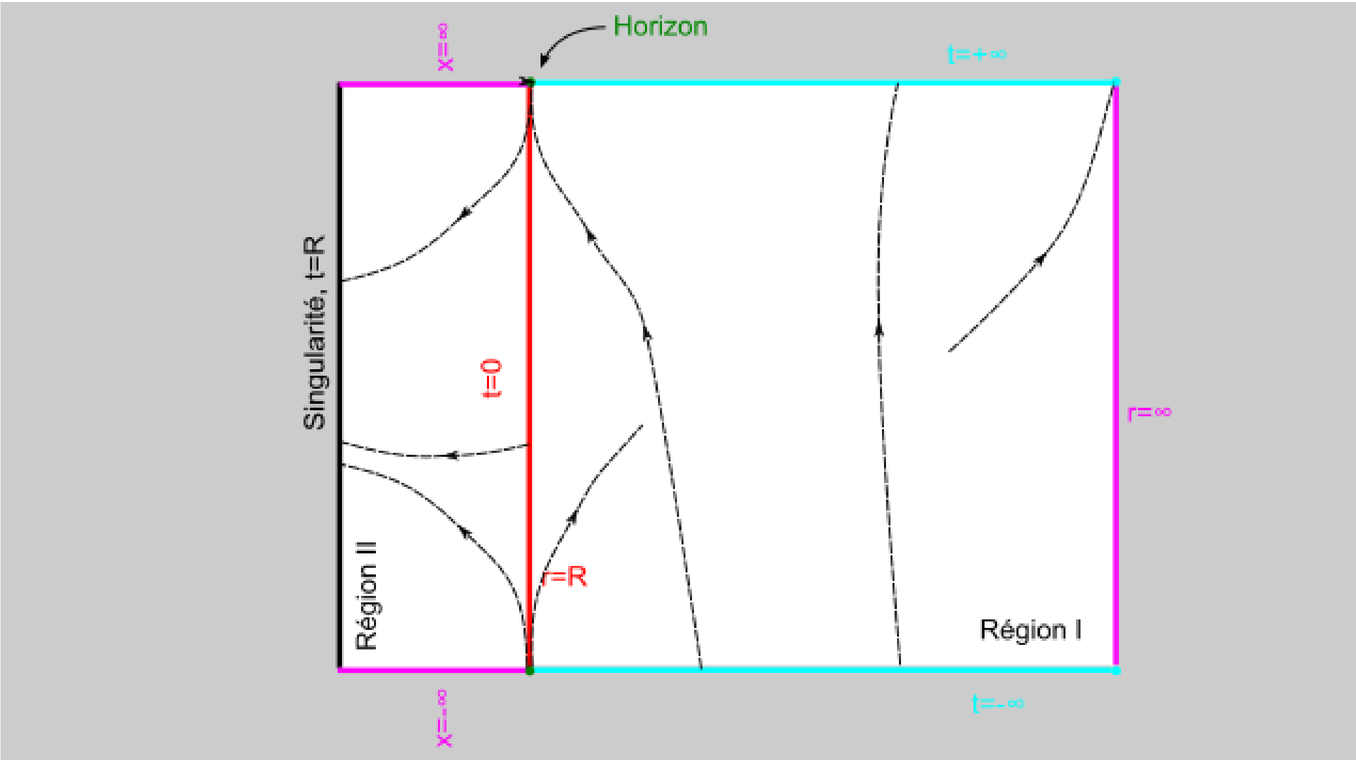
On sait par ailleurs qu'il existe des lignes d'univers qui vont de la région extérieure à la région intérieure, en traversant ce qu'on appelle l'horizon ; la question est alors où sont ces passages sur les cartes? On peut supposer que les deux cartes de Schwarzschild présentent les deux parties des lignes allant de l'infini temporel passé à la singularité, ne manquant que l'événement qu'est le passage de l'horizon [2]. La question est alors comment sont connectées les deux régions pour pouvoir joindre la partie d'une telle ligne qui est à l'extérieur avec la partie qui est à l'intérieur. Les présentations vulgarisées laissent croire que la jonction se fait par la ligne $r = R$ et t fini (en coordonnées extérieures), la ligne dessinée en rouge ; or aucune ligne d'univers n'atteint cette ligne dans la région extérieure, ce qui rend l'idée nécessairement fausse.

D'après ce qu'on a vu précédemment, le « passage » ne peut se faire que là où aboutissent des lignes incomplètes côté futur. Or, côté extérieur, cela est réduit à un seul point dans une coupe (θ, φ) constant, en t=∞, r=R. Cependant, du côté intérieur il y a toute la ligne t=0. Pour différentes raisons, seuls les deux points t=0 et x= $\pm\infty$ sont candidats. On suppose que seul l'un des deux points fait la connexion entre l les deux régions, qu'on choisit être celui côté des x positifs. Corrélativement, toutes les lignes aboutissant au reste de la frontière t=0 côté intérieur, i.e., en x fini et x tendant vers -∞, demandent complétion, ce qui est abordé plus loin.

En termes de représentation, mettre les deux cartes côte à côte et visualiser le passage amène à mettre le point vert en commun. Attention, l'idée n'est pas de représenter *une* carte, mais bien *deux* cartes indépendantes, juxtaposées d'une certaine manière à fin d'illustration, un peu comme on le fait pour le globe terrestre quand on ajoute des cartes pour représenter les régions polaires.

La disposition qu'on trouve le plus souvent (toujours) consiste aussi à mettre en commun toute la ligne rouge. C'est assez naturel quand on garde les coordonnées sous le nom de r et t, en dépit de leur genre. Et on a vu que les deux lignes rouges représentent les mêmes événements. On obtient ceci:

2. C'est une supposition assez gratuite, rien ne permet de rejeter l'idée qu'il y ait une troisième carte, avec des lignes d'univers non réduites à un point se connectant d'un côté à la région extérieure de l'autre à la région intérieure.



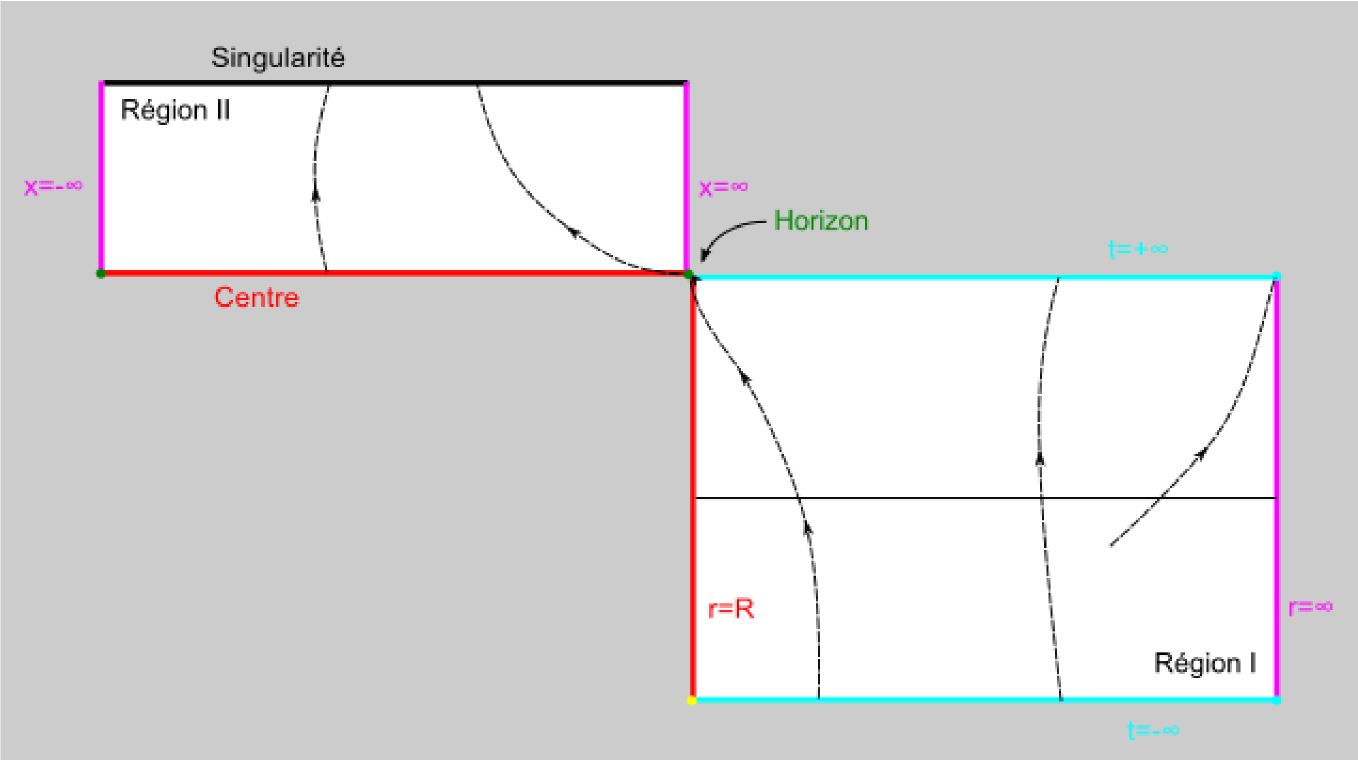
SchwK-IetII-classic.png

Plusieurs défauts apparaissent en évidence, dont principalement :

– L'incohérence de genre des coordonnées (renforcé ici par le changement de lettre), avec la discontinuité correspondante;
– l'infini spatial $x = -\infty$ rencontre l'infini temporel passé ;
– il y a des lignes d'univers qui arrivent à la ligne rouge côté intérieur sans que cela puisse faire sens de les continuer côté extérieur ;
– le voisinage en coordonnées d'un point de la ligne rouge est illusoire, il ne peut pas représenter un voisinage dans la variété ;
– les lignes passant par le point vert futur font demi-tour ;
– les lignes passant par le point vert passé ne peuvent pas se connecter entre les deux régions, puisqu'elles partent en s'en éloignant des deux côtés.

On se perd totalement en conjectures comment interpréter physiquement un tel schéma! (Du moins, on devrait…)

Une autre disposition est proposée ici, qui pallie tous ces défauts, et, on le verra plus loin, est bien plus naturelle pour s'occuper des lignes restant à étendre. La disposition relative des coupes radiales des deux régions, cartographiées en coordonnées de Schwarzschild, peut être présentée comme suit:



SchwK-IetII-v2.png

Dans ce schéma, le point vert joignant les deux cartes représente les événements de passage entre les deux régions (l'horizon donc), le passage des lignes d'univers qui connectent les deux régions. Ces événements sont des limites de coordonnées, aucune des deux cartes ne les contient, ils n'ont de coordonnées ni dans une carte ni dans l'autre, même en prenant des coordonnées étendues. Comme on l'a vu, que ce soit d'un côté ou de l'autre, ce point ne représente pas un unique événement de la coupe radiale, mais un ensemble d'événements. Une autre carte est nécessaire pour les visualiser correctement.

Par ailleurs, les deux lignes rouges ont leur orientation correcte, spatiale côté intérieur et temporelle côté extérieur, et ne peuvent pas être confondues en tant que lignes. Cette présentation permet, entre autres, de laisser de la place pour l'extension éventuelle des lignes d'univers aboutissant au centre (la ligne t=0, x fini) dans la région intérieure.

Les quatre régions

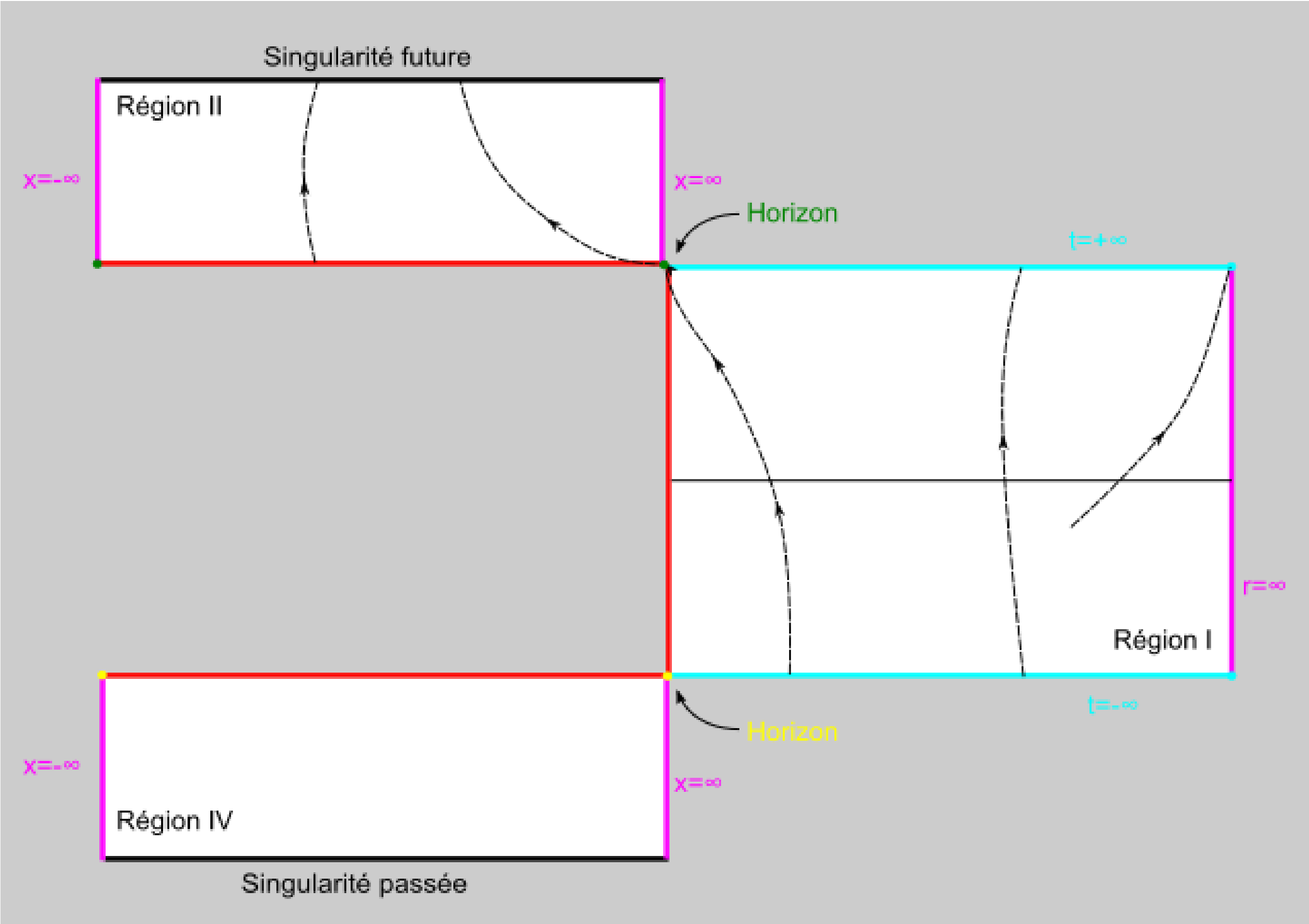
Le schéma avec les deux régions laisse trois cas de lignes extensibles: le point jaune, symétrique temporel de l'horizon en vert sur la carte de la région extérieure, le point vert, symétrique spatial côté x négatif dans la région intérieure, et les lignes de cette région aboutissant en t=0 et x fini.

On va procéder par hypothèses paraissant simples [3] pour obtenir un ensemble de cartes s'approchant de la complétude, tout en gardant des coordonnées « à la Schwarzschild ».

La symétrie par renversement du temps dans la région extérieure, ainsi que celle par changement de signe de x dans la région intérieure, suggère fortement une solution consistant à viser une symétrie complète. Cela amène à rajouter deux régions, symétriques des existantes.

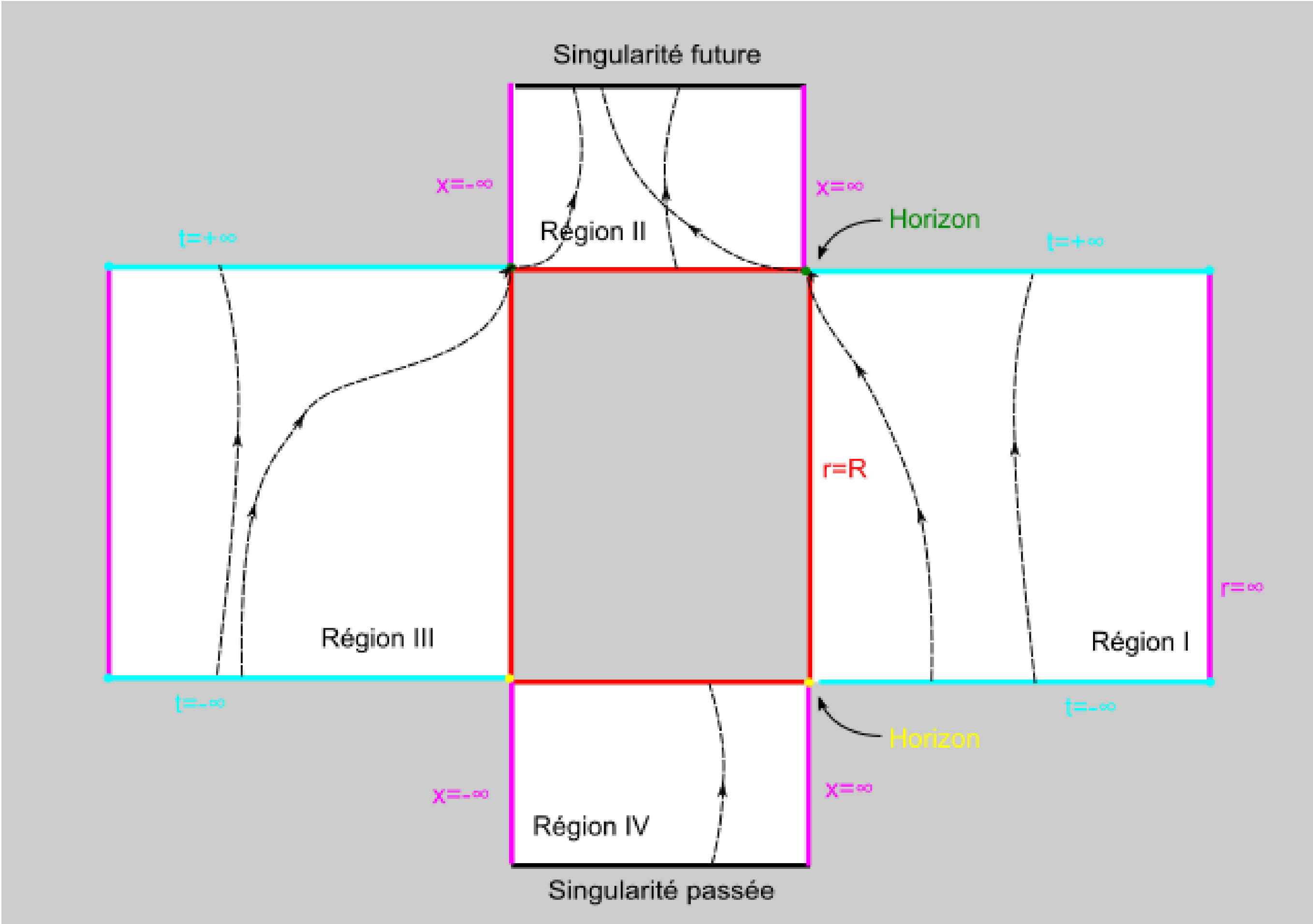
Une nouvelle région intérieure, dans le passé et symétrique de celle future permet de prolonger les lignes d'univers aboutissant en $r = R$ et $t = -\infty$ sur la carte de la région extérieure, qui apparaît alors comme un horizon passé. Par symétrie, la nouvelle région intérieure fait apparaître une seconde singularité, dans le passé. Et elle demande complétion côté des x négatifs. Elle a aussi des lignes d'univers finissant sur une ligne rouge, qu'on va très naturellement imaginer pouvoir se combiner avec celles de la région intérieure future. On obtient alors:

3. Là encore des hypothèses non justifiées.



SchwK-IaIII.png

De même, une nouvelle région extérieure, symétrique de celle existante, va finir de tout compléter, en se connectant aux horizons côtés des x négatifs, et cela donne le schéma suivant, ce qui sera plus clair :



SchwK-IaIV.png

Ce schéma, établi moyennant quelques hypothèses un peu gratuites (raisonnement par symétrie) montre à quelques manques ponctuels près un espace-temps complet. Ce n'est pas un atlas, les horizons (points verts et jaunes) et le centre (en rouge) n'étant pas couverts proprement. Cette disposition donne néanmoins une idée d'ensemble.

Pour les distinguer, les régions sont numérotées. La région I est la région extérieure originelle, la région II la région intérieure originelle (singularité dans le futur), la région III est la symétrique de la région I, et la région IV est la région intérieure avec la singularité passée.

Les différentes métriques de Schwarzschild

Cela amène à considérer que la solution de Schwarzschild se décrit en coordonnées de Schwarzschild non pas par un seul domaine et une forme métrique, mais comme quatre régions, disjointes deux à deux, chacune avec ses coordonnées et sa forme métrique, à savoir:

Région I (l'extérieur d'origine), coordonnées (t, r, θ, φ) prises dans t $\in$]-∞, +∞[, r $\in$]R, ∞[, (θ, φ) des coordonnées de $\mathbb{S}^2$, la métrique est

$$(1 - \frac{R}{r})dt^2 - (1 - \frac{R}{r})^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Région II (l'intérieure future, le trou noir), coordonnées (t, x, θ, φ) prises dans t $\in$]0, R[, x $\in \mathbb{R}$, (θ, φ) des coordonnées de $\mathbb{S}^2$, la métrique est

$$(\frac{R}{t} - 1)dt^2 - (\frac{R}{t} - 1)^{-1}dx^2 - (R-t)^2 d\Omega^2$$

(la singularité est en t=R.)

Région IV (l'intérieure passée, le trou blanc), coordonnées (t, x, θ, φ) prises dans t $\in$]0, R[, x $\in \mathbb{R}$, (θ, φ) des coordonnées de S^2, la métrique est

$$(\frac{R}{t} - 1)^{-1}dt^2 - (\frac{R}{t} - 1)dx^2 - t^2 d\Omega^2$$

La singularité est en $t \rightsquigarrow 0$, le centre en $t \rightsquigarrow R$, donc la coordonnée t est orientée correctement, croissante vers le futur. L'orientation de la coordonnée temporelle est ce qui justifie de distinguer les métriques des régions II et IV.

Enfin la région III se décrit à l'identique de la région I, en une sorte d'univers parallèle. (Pour le plaisir de distinguer, on pourrait prendre une coordonnée spatiale entre -∞ et -R. De même on aurait pu choisir t entre -R et 0 pour la région IV.)

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres sont souvent présentées comme une description complète d'une solution au problème de Schwarzschild [4]. De fait, les coordonnées de

4. Et souvent même comme une extension des coordonnées de Schwarzschild via quelques changements de coordonnées. La rigueur mathématique demanderait le contraire: montrer que la variété décrite en coordonnées de Kruskal-Szekeres est une solution au problème, et *ensuite* montrer, région par région,

Kruskal-Szekeres permettent un atlas d'une seule carte (en considérant secondaires les problèmes des coordonnées de $\mathbb{S}^2$, θ et φ). Elles ont donc entre autres (et avec d'autres systèmes de coordonnées) la propriété de couvrir correctement les horizons et le centre, et devraient clarifier la question des lignes incomplètes. Le passage entre les coordonnées de Schwarzschild et celles de Kruskal-Szekeres est rarement expliqué dans la vulgarisation au-delà de la présentation des formules, et le propos principal de ce texte est d'essayer de le présenter de manière correcte et, espérons-le, aisément compréhensible.

Si on suppose que le diagramme ci-dessus en coordonnées de Schwarzschild est essentiellement complet, la relation avec les coordonnées de Kruskal-Szekeres doit être presque un-pour-un. Les difficultés principales viennent des horizons (passages entre régions intérieures et régions extérieures) et du centre (lieu supposé de connexion des lignes incomplètes dans les régions intérieures).

Présentation des coordonnées

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres sont (T, X, θ, φ), où T est une coordonnée temporelle, X une coordonnée spatiale, et (θ, φ) des coordonnées de S^2. Le plus souvent, T et X sont présentées sans dimension ; une conversion pour obtenir des valeurs dimensionnées consiste à multiplier T et X par des coefficients de dimension adapté, proportionnels à R. Dans ce texte, les valeurs dimensionnées sont utilisées, tout en gardant c=1, ceci pour être cohérent avec les choix fait pour les coordonnées de Schwarzschild. La forme métrique est alors

$$4\frac{R}{\rho}e^{-\rho/R}(dT^2 - dX^2) - \rho^2 d\Omega^2$$

avec ρ tel que $R(R-\rho)e^{\rho/R} = T^2 - X^2$.

Le domaine de définition est T et X parcourant chacun $\mathbb{R}$ sous contrainte T^2-X^2<R^2, et (θ, φ) les coordonnées de $\mathbb{S}^2$. Les singularités de courbure sont en T^2-X^2=R^2 et T positif, et en T^2-X^2=R^2 et T négatif.

Les horizons sont en T = ±X, et délimitent les quatre régions, par exemple X>0 et |T|<X correspond à la région I. Avec ces coordonnées, les quatre régions sont représentées par une unique carte. Et les horizons n'apparaissent plus comme des points sur un diagramme 2D, mais comme des lignes d'événements normaux ; enfin, le centre se présente comme un point.

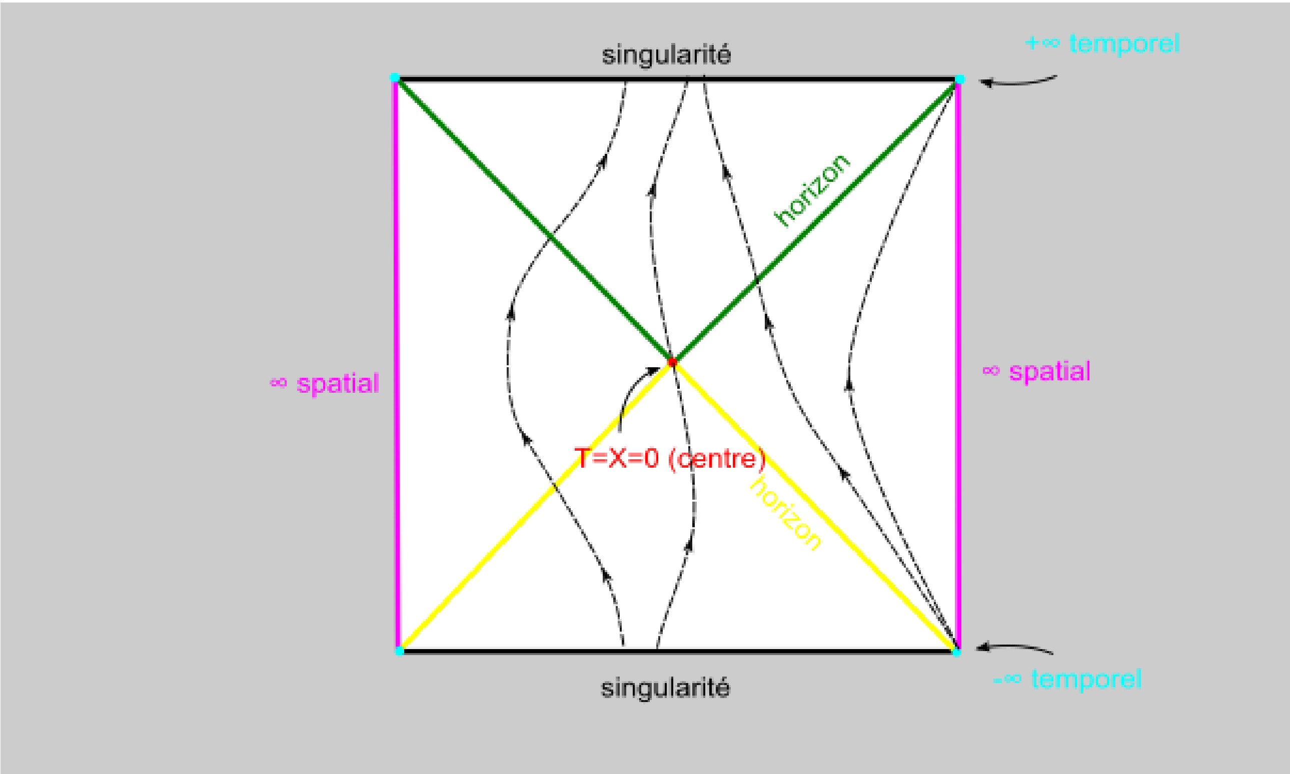
comment cela coïncide avec les différentes cartes de Schwarzschild. C'est seulement ainsi qu'on peut en conclure qu'il n'y a que l'horizon entre la région I et la région II, conclusion difficile à atteindre sur la seule base des coordonnées de Schwarzschild.

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres partagent pas mal de similarités avec les coordonnées de Schwarzschild pour les régions *intérieures*. En particulier, X n'est pas interprétable comme un rayon comme dans des coordonnées sphériques. Le rayon au carré d'une sphère spatiale représentée par T et X constants est le coefficient de $d\Omega^2$ dans la métrique, et a la même valeur qu'en coordonnées de Schwarzschild. En conséquence il ne s'annule nulle part. (Dans les régions intérieures, ρ vaut R en (T, X)=(0, 0), et tend vers 0 quand on tend vers une des singularités.)

La carte d'une coupe θ et φ constants, représentant des mouvements « radiaux » se présente comme suit, avec le code couleur utilisé précédemment!

[Figure, KS, à faire]

Une représentation bornée, en appliquant une fonction bornant sur T et X indépendamment, est:



KS-4K.png

Les couleurs sont encore celles des figures précédentes.

On retrouve les singularités et l'infini spatial des régions extérieures, comme en coordonnées de Schwarzschild. Par contre, les infinis temporels des régions extérieures se réduisent à un point, et y aboutissent toutes les lignes d'univers qui sont complètes dans la région. Les infinis spatiaux des régions intérieures ont disparu, ce qui est plutôt satisfaisant.

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres font apparaître les horizons comme des lignes d'événements non frontaliers (lignes vertes et jaunes) ; les événements de passage entre une région intérieure et une région extérieure se disposent sur toutes les valeurs non nulles de T.

Enfin, aux coordonnées T=X=0, le centre se réduit à un point non frontalier (donc une sphère d'événements dans l'espace-temps). Les lignes d'univers dans les régions intérieures aboutissant à la ligne rouge dans les cartes de Schwarzschild s'y connectent, comme par exemple la ligne X=0. Ces lignes passent directement de la région IV à la région II, sans aucun événement dans les régions extérieures. Elles sont inextensibles, allant de singularité à singularité.

Les horizons peuvent se définir comme les événements de passage de lignes d'univers entre une région intérieure et une région extérieure, soit quatre horizons, IV à I, IV à III, I à II et III à II. Le centre peut se définir comme les événements de passage direct de lignes d'univers entre IV et II.

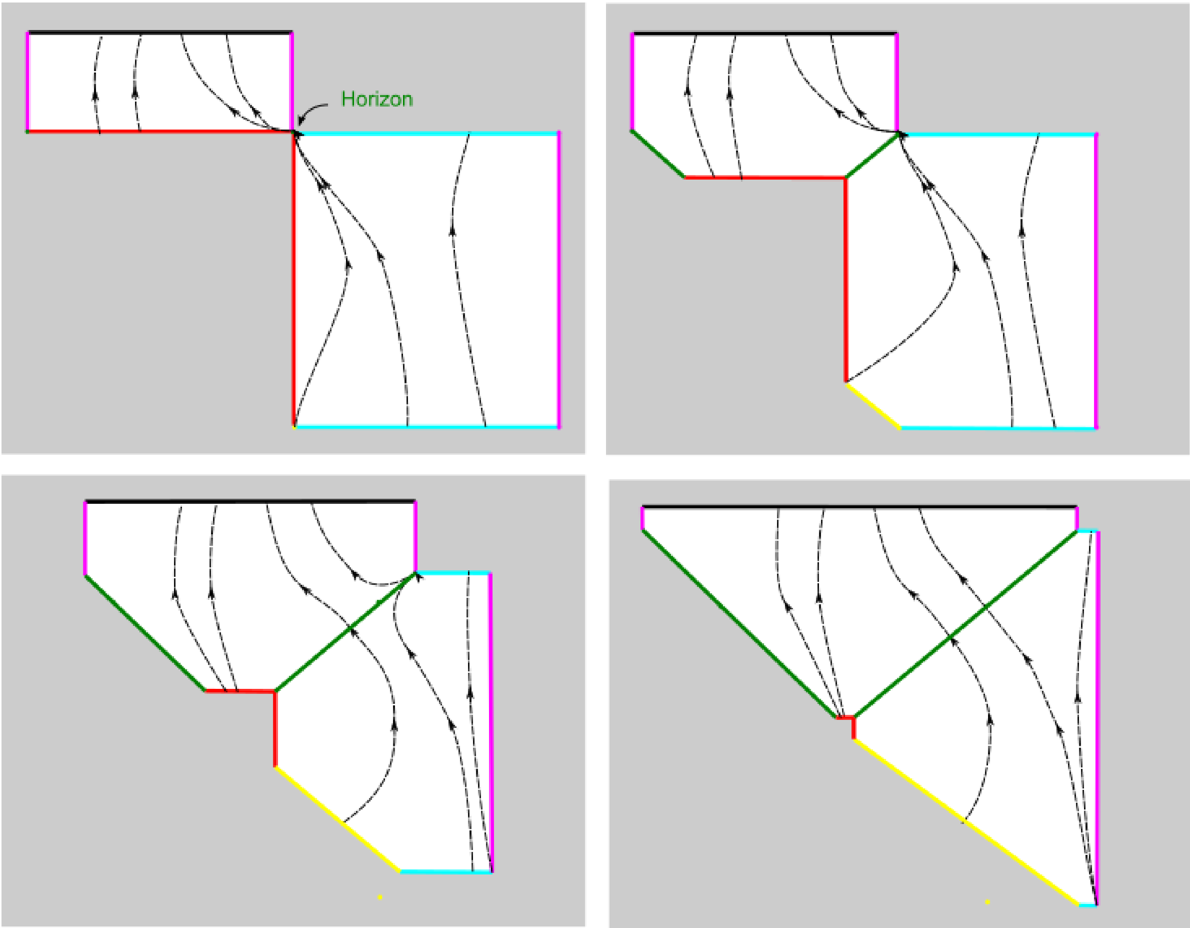
La carte ci-dessus n'est pas totalement satisfaisante, mais adaptée à l'aboutissement d'un morphing à partir des coordonnées de Schwarzschild. Le défaut principal est que les coins représentent à la fois les infinis temporels des régions extérieures et les limites des horizons et des singularités ; en particulier la distinction entre infinis temporels « normaux » et singularité n'est pas mise en évidence. Une autre représentation sera présentée plus loin.

Morphing

Comparer les cartes de Schwarzschild avec les quatre régions ensemble, et la carte de Kruskal-Szekeres permet de commencer à voir les relations. On peut les illustrer en montrant comment passer « graphiquement » d'une carte à l'autre.

Le passage des coordonnées de Schwarzschild à celles de Kruskal-Szekeres introduit des déformations des lignes intérieures, mais surtout des modifications importantes des limites des cartes. On va analyser cela cas par cas, couleur par couleur. La remarque la plus importante est que, sur les limites, des points peuvent devenir des lignes et réciproquement.

Quelques étapes intermédiaires, très schématiques, sont présentées dans la figure suivante (ce ne sont pas de vraies cartes, correspondant à des systèmes de coordonnées bien définis) permettent d'illustrer la transformation. C'est limité aux régions I et II, les autres s'en déduisent par symétrie.



Les horizons (points vert et jaune en limite de cartes de Schwarzschild) deviennent des lignes qui s'étendent d'un côté vers le centre, et de l'autre vers l'infini, où ils vont à la rencontre des singularités et de divers infinis. En coordonnées de Kruskal-Szekeres ces lignes ne sont plus en limite de carte, mais des éléments comme les autres de la carte, elles se développent dans la zone blanche. Les lignes d'univers passant par l'horizon, originellement via le même point en limite de coordonnées, se séparent pour passer en des événements d'horizon distincts, ainsi que cela doit être.

Les lignes rouges, r=R en région I et t=0 en région II, se rétractent, elles finiront par n'être plus qu'un point, le centre, celui de coordonnées de Kruskal-Szekeres T=X=0, qui, comme les horizons ne sera plus en limite. Les demi-lignes d'univers dans les régions II et IV finissent par se rejoindre au centre. En les suivant à l'envers, les connexions se font à x de signes opposés, la valeur limite de x, en coordonnées de Schwarzschild quand la demi-ligne tend vers le centre, étant en relation avec la vitesse d'arrivée sur le centre en coordonnées de Kruskal-Szekeres.

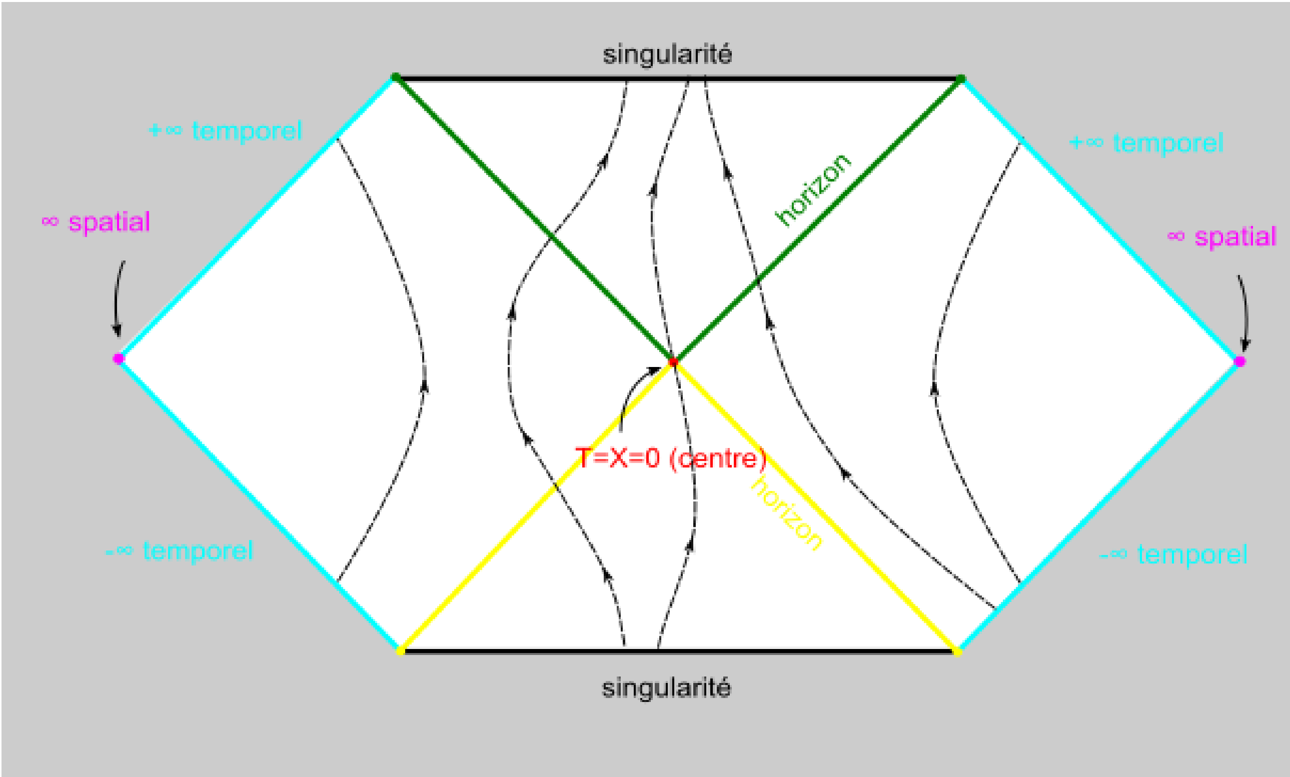
Les singularités sont peu affectées.

Les lignes représentant les infinis spatiaux dans la région II disparaissent. Un effet parasité est la rétraction des infinis temporels de la région extérieure à des points (sur le diagramme 2D, à des sphères dans l'espace-temps), alors qu'ils représentent l'aboutissement de lignes d'univers. Parallèlement, les lignes des infinis spatiaux des régions extérieures, qui ne correspond pas des aboutissements de lignes d'univers, restent des lignes, alors qu'on les verrait bien se rétracter, à l'instar des infinis spatiaux des régions intérieures.

Le message principal est que la combinaison des quatre cartes de Schwarzschild représente bien le même espace-temps que la carte de Kruskal-Szekeres, ce sont simplement des cartes différentes de la même variété, complètes au sens où aucune ligne d'univers ne peut être étendue en dehors.

Vers une représentation à la Penrose

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres ont la propriété que les radiales de genre lumière se présentent, dans un diagramme 2D représentant une coupe à θ, φ constants, comme des lignes à 45°. En appliquant une fonction bornante identique sur X et T, seules les lignes représentant les horizons gardent cette propriété. Une autre approche consiste à appliquer les fonctions bornantes à X-T et X+T, ce qui permet de garder les radiales lumière à 45°. On obtient alors quelque chose qui ressemble à:



KS-4D.png

L'infini spatial des régions extérieures se réduit à un point. Les infinis temporels, aboutissants des lignes temporelles de durée propre infinie restant à l'extérieur, redeviennent des lignes. On a là certainement une des cartes les plus parlantes de la solution de Schwarzschild.

La figure est générique pour différentes fonctions bornantes. Cependant, un choix particulier de la fonction bornante appliquées à X-T et X+T permet d'obtenir des coordonnées *conformes*, à savoir telles que la métrique se présente sous la forme

$$F^2(X,T)(dT^2 - dX^2) - G^2(X,T)(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

On obtient alors ce qu'on appelle un diagramme de Penrose (que l'on devrait appeler plutôt des coordonnées de Penrose, ou des cartes de Penrose).

On pourrait aussi s'intéresser à un diagramme de Penrose en partant des coordonnées de Schwarzschild. [À faire, éventuellement.]