

Représentations de la géométrie de Schwarzschild

©2017, 2021, 2023 Amanuensis

2023/11/09

Lien de publication de la version courante: Publié
<http://www.lahri.org/public/SchSch.pdf>

Textes et dessins, ©Amanuensis

Commentaires: Va être posté sur FS

Contact avec l'auteur: amanuensis at lahri.org

Ma référence : Schwarzschild B, SchSch v0.1.6

Sommaire

Introduction	2
Prolégomènes	3
Représentations de la géométrie de Schwarzschild avec les coordonnées de Schwarzschild	3
Représentations planaires	5
La région extérieure	5
La région intérieure	7
Connexion entre intérieur et extérieur	10
La complétion par ajout de régions	14
Résumé des différentes cartes de Schwarzschild	17
Résumé sur les interconnexions entre régions	18
Représentations de la géométrie de Schwarzschild avec les coordonnées de Kruskal-Szekeres	19
Présentation des coordonnées	20
Morphing	23
Vers une représentation à la Penrose	25

Introduction

Le contexte est la Théorie Générale de la Relativité, précisément l'étude de la solution de Schwarzschild au problème d'un espace-temps vide, de symétrie spatiale sphérique, asymptotiquement confondable avec l'espace-temps de Minkowski.

Ce texte étudie quelques aspects des *représentations* de la solution par des cartes planes, suivant les coordonnées de Schwarzschild et celles de Kruskal-Szekeres. Les points saillants sont d'une part une représentation des cartes de Schwarzschild différente de ce qu'on voit le plus souvent, prenant en compte la différence conceptuelle des coordonnées de Schwarzschild selon qu'elles sont utilisées pour l'extérieur ou l'intérieur ; et d'autre part la relation entre les cartes de Schwarzschild et la carte de Kruskal-Szekeres. Le problème principal vient des *horizons*, que les cartes de Schwarzschild ne permettent pas de bien comprendre ; ainsi que le statut de ce qui appelé dans ce texte la « sphère centrale », cette surface un peu méconnue mais si spéciale dont les coordonnées de Kruskal-Szekeres sont $X=T=0$.

Une première section décrit succinctement les aspects de la Théorie Générale de la Relativité qui vont fonder la notion de modèle d'espace-temps, et la problématique de leur représentation schématique de ces modèles, illustrant la description mathématique pour aider à comprendre certains aspects de la physique ainsi modélisée. La section introduit aussi le modèle de Schwarzschild. Ce sont les concepts qu'il est nécessaire de connaître pour lire le reste de cet essai.

Les deux autres sections s'intéressent la deuxième aux cartes de Schwarzschild, la troisième à celle de Kruskal-Szekeres, avec un accent important sur la comparaison entre les deux, sur la base d'une représentation particulière pour les cartes de Schwarzschild, résultat final de la section sur les cartes de Schwarzschild.

Prolégomènes

[Non inclus dans cette publication]

Par abus de terminologie, on parlera de métrique pour mentionner la forme métrique.

La notation ds^2 n'est pas employée pour éviter la confusion sur le signe, le résultat de la forme métrique pouvant tout aussi bien être positif que négatif ou nul.

La convention de signe pour dans les formules est $+$ —, mais on parlera de signe majoritaire ou de signe minoritaire dans le texte pour le rendre indépendant de la convention de signe.

Les formules sont simplifiées par $c=1$; ainsi les longueurs et les durées apparaissent comme homogènes.

Représentations de la géométrie de Schwarzschild avec les coordonnées de Schwarzschild

L'espace-temps de Schwarzschild est présenté le plus souvent avec les coordonnées de Schwarzschild. Cette section s'intéresse d'abord à des cartes utilisant ces coordonnées et rencontrées couramment, principalement pour en montrer les inconvénients, en particulier conceptuels. L'avantage de ces coordonnées, qui en justifie largement l'usage, est qu'elles montrent la staticité de la solution, propriété essentielle pour montrer que la gravitation de Newton en est une approximation.

Les coordonnées de Schwarzschild comprennent une composante temporelle t , et des coordonnées sphériques de $\mathbb{R}^3$, notées (r, θ, φ) . La forme métrique est donnée par :

$$(1 - \frac{R}{r})dt^2 - (1 - \frac{R}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

où R (le rayon de Schwarzschild) est un paramètre homogène à une longueur. (Un paramétrage par une masse M permet de relier le modèle à la gravitation de Newton, par $R = 2GM/c^2$, souvent noté $2GM$, ou même $2M$, quand implicitement on a choisi des unités telles que $c=1$ et $G=1$.)

Voyons le domaine de définition. Aucune contrainte ne portant sur t , on va considérer que cette coordonnée parcourt tous les réels.

θ et φ venant des coordonnées sphériques, on peut prendre comme intervalles $]-\pi/2, \pi/2[$ et (par exemple) $]0, 2\pi[$. Plus fondamentalement, (θ, φ) est un système de coordonnées de $\mathbb{S}^2$ (la sphère en tant que surface), et pourrait être remplacé par tout autre système de coordonnées de $\mathbb{S}^2$ sans affecter les autres coordonnées. Pour ne pas traîner les problèmes spécifiques aux coordonnées de $\mathbb{S}^2$, on note Ω un atlas de $\mathbb{S}^2$, et on notera $d\Omega^2$ la métrique homogène isotrope de cette variété. La métrique de l'espace-temps est alors notée (abusivement):

$$(1 - \frac{R}{r})dt^2 - (1 - \frac{R}{r})^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2$$

La coordonnée r présente aussi une difficulté. L'examen montre que la forme métrique n'est pas définie pour $r = R$. On a donc *deux* domaines de définition *disjoints*, $r > R$ et $r \in]0, R[$, couvrant des régions disjointes, c'est à dire deux cartes indépendantes. Parce qu'on définit une carte par un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il n'y a pas de point de l'espace-temps qui soit couvert par les deux cartes. Selon les principes présentés dans les prolégomènes, on doit considérer qu'il y a *deux* systèmes de coordonnées de Schwarzschild, deux cartes qui doivent être étudiées et présentées séparément, et on ne sait pas si elles forment un atlas ou non de l'espace-temps qui serait solution maximale (on verra que ce n'est pas le cas, la variété image n'est pas causalement complète), ni comment les régions images se disposent dans un éventuel espace-temps dont elles seraient des sous-parties.

La première région, pour $r > R$ est la région « extérieure »; c'est celle qui modélise l'univers où nous évoluerions. La deuxième, pour $r \in]0, R[$, est usuellement présentée comme la région « intérieure » du trou noir. Les deux régions sont étudiées d'abord séparément, chacune avec sa carte de Schwarzschild.

Représentations planaires

Un espace-temps étant une variété de quatre dimensions, on ne peut pas le représenter directement. Les représentations données dans ce document sont des cartes planes, celles de projections de l'espace-temps sur la variété sous-tendues par les deux premières coordonnées (par exemple (t, r) , une temporelle (en ordonnée) et une spatiale (en abscisse)). On peut les comprendre soit comme quoi un point sur la carte représente tous les événements de même (t, r) , mais de (θ, ϕ) différents, soit comme une coupe à (θ, ϕ) constants. On profite ainsi de la symétrie sphérique de la géométrie de Schwarzschild.

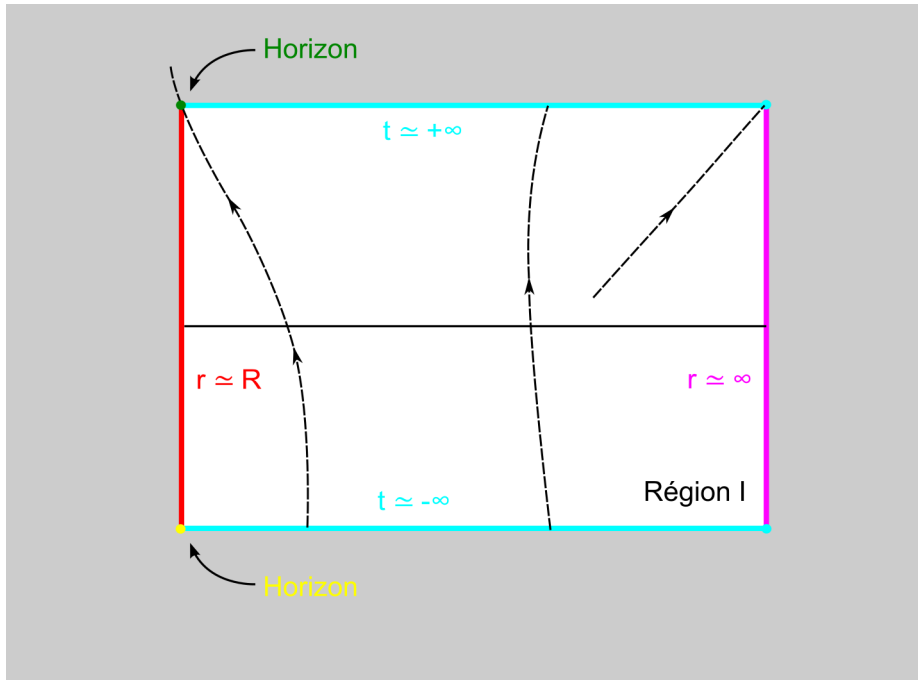
Il s'agit de la même approche que les diagrammes de Minkowski pour l'espace-temps de Minkowski, employés dans des textes sur la théorie restreinte de la relativité.

Ensuite, les coordonnées sont bornées, chacune indépendamment. Les fonctions de compression ne sont pas précisées, et importent peu. Les coordonnées étant bornées indépendamment, les infinis sont des droites. En conséquence, le domaine de définition des cartes est un rectangle de $\mathbb{R}^2$ d'aire finie. Cela permet d'utiliser implicitement des coordonnées étendue, et visualiser les limites.

Un code de couleur est utilisé de manière cohérente pour typer les différentes parties de la frontière.

La région extérieure

La carte pour la région extérieure, avec r parcourant $]R, \infty[$, ne pose pas de problème particulier.



SchwK-I-v3.png

L'ouvert de validité est en blanc. Les lignes pointillées représentent des lignes d'Univers. Les frontières sont en couleur, permettant de distinguer les différents cas.

Certaines des limites sont des infinis temporels (t tendant vers $\pm\infty$ —écrit $t \rightsquigarrow \pm\infty$), et r dans $]R, \infty[$; elles sont dessinées en cyan. Ces points sont des limites de lignes d'Univers, qui sont atteintes en temps propre infini; un exemple est les lignes d'immobilité $t \mapsto (t, r, \theta, \varphi)$, avec r , θ , et φ constants. Les limites étant atteintes en temps propre infini, elles ne sont pas extensibles au-delà.

L'infini spatial, $r \rightsquigarrow \infty$ et t restant fini, en magenta, ne contiennent pas d'aboutissement d'une quelconque ligne d'univers ou lumière.

Jusque là, il s'agissait de limites ayant leur pendant dans l'espace-temps de Minkowski, auquel tend asymptotiquement la solution de Schwarzschild quand $r \rightsquigarrow \infty$.

Il reste les cas où r tend vers R .

Pour $r \rightsquigarrow R$ et $t \rightsquigarrow \pm\infty$ simultanément (points vert et jaune), on peut montrer qu'ils sont atteints en temps propre fini par certaines lignes d'Univers. Ces lignes sont extensibles, jusqu'à preuve du contraire. Elles seront analysées plus loin, et une conclusion sera que ces lignes se poursuivent dans le trou noir, et donc que le point futur (en vert) représente le passage dans le trou noir; c'est l'horizon, car tous les passages par le point vert se

font seulement du passé vers le futur. Martelons que ces points *ne sont pas* dans le domaine de définition, ils sont comparables à des asymptotes, possiblement impropres (événements asymptotique différent selon les lignes).

La partie $r = R$, t fini, en rouge, est très spéciale, et mérite une étude particulière, qui est difficile à mener sur la base des coordonnées de Schwarzschild. Elle est présentée plus loin. Un constat important est qu'aucune ligne d'univers ou lumière de la région extérieure n'aboutit à cette ligne : la question de l'extensibilité de lignes de genre temps ou nul qui y aboutiraient ne se pose pas (il ne peut pas s'agir d'événements de « passage »). Un autre constat est que, dans le système de coordonnées utilisé, un coefficient de la métrique diverge sur cette ligne, c'est au minimum une singularité de coordonnées, dont le sens physique reste à comprendre.

En résumé, la frontière de la région extérieure comprend deux infinis temporels, un infini spatial (ces trois frontières étant ce qui correspond à « asymptotiquement Minkowski »), deux points où aboutissent des lignes d'Univers extensibles, et une ligne frontière spatiale. La région cartographiée n'est donc pas complète, et la question de l'extension sera traitée plus loin.

La région intérieure

Traditionnellement le domaine présenté pour $r \in]0, R[$ est le *trou noir*, région dont il est impossible de sortir.

L'examen de la métrique de Schwarzschild avec $r < R$ permet de détecter une difficulté de taille : la coordonnée notée usuellement t est spatiale (le coefficient dans la métrique de dt^2 est du signe majoritaire, comme $d\Omega^2$) et celle notée r est temporelle (dr^2 a un coefficient du signe minoritaire). Pour éviter les risques d'incompréhension (et contrairement à l'usage, certes bien établi, mais conceptuellement mauvais, comme ce texte va le montrer), on va adopter une notation conforme aux *connotations physiques* usuelles des lettres, et noter ces coordonnées t' et x (dénnotant resp. la coordonnée temporelle et la coordonnée spatiale, qui n'est pas radiale). Le système de coordonnées est alors noté (t', x, θ, φ) et la forme métrique se réécrit alors comme

$$\left(\frac{R}{t'} - 1\right)^{-1} dt'^2 - \left(\frac{R}{t'} - 1\right) dx^2 - t'^2 d\Omega^2$$

La notation t' permet d'éviter la confusion avec la coordonnée t utilisée pour la carte de la région extérieure.

Le domaine de définition de t' est alors $]0, R[$. La métrique tend vers une formule dégé-

née quand t' tend vers 0, et un calcul montre que la courbure diverge (précisément, le scalaire de Kretschmann tend vers l'infini, soit une « courbure infinie »). Il s'agit d'une singularité de courbure, indépendante du choix de coordonnées.

Un petit détail cloche encore : la singularité est dans le sens de la coordonnée temporelle décroissante, ce qui s'interprète par défaut aller vers le passé ; or pour le trou noir tout ce qui entre *finit* à la singularité. Il est nécessaire de changer le signe de la coordonnée temporelle, pour rester dans le cadre des conventions générales de notation en physique. Pour différentes raisons, on va prendre plutôt $R - t'$ comme coordonnée temporelle, qui parcourt alors toujours $]0, R[$, mais avec R pour la singularité. La métrique devient (en gardant t' par abus) :

$$\left(\frac{R}{t'} - 1\right) dt^2 - \left(\frac{R}{t'} - 1\right)^{-1} dx^2 - (R - t')^2 d\Omega^2$$

Remarquons qu'il a été fait des choix venant de l'idée de trou noir. Mathématiquement il y a un autre choix, qu'on verra plus loin (notion de « trou blanc »).

La coordonnée x parcourt apparemment tout $\mathbb{R}$ (ce qui justifie l'écriture x à la place de r). Rien ne s'y oppose, et on doit considérer tout l'intervalle si on ne veut pas créer une source de lignes extensibles.

Un point important est que x ne peut pas s'interpréter comme un rayon comme dans des coordonnées sphériques de l'espace. Pour la région extérieure, r est égal au rayon aréal, la valeur telle que $4\pi r^2$ est l'aire (calculée à partir de la métrique) d'une sphère x et t constants, θ et φ variables, une sphère de genre espace). Le rayon aréal est défini pour tout événement de la géométrie, et sa valeur en un événement est indépendante de tout système de coordonnées, on note A ce rayon (ou plus précisément la fonction qui à un événement associe la valeur de ce rayon). Quand la métrique contient le terme sphérique $d\Omega^2$, le coefficient de ce terme, en unité spatiale, est A^2 . (Par convention, l'aire totale de la sphère, calculée à partir de $d\Omega^2$, vaut 4π .)

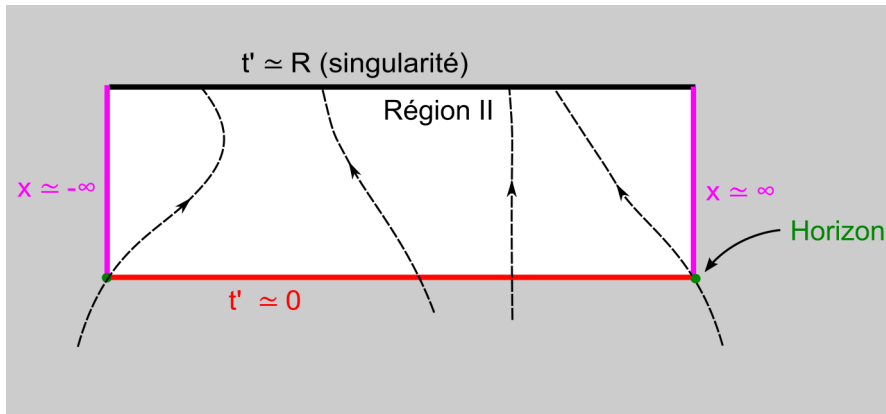
Dans la région intérieure A ne dépend pas de x mais de t' . On a $A^2 = (R - t')^2$, A varie donc entre les limites 0 (à la singularité) et R (pour $t' = 0$). Ce rayon ne s'annule nulle part (mais tend vers 0 à la singularité), et une tranche spatiale t' constant n'a pas de centre spatial pour la symétrie sphérique. Donc (x, θ, ϕ) ne forment pas les coordonnées d'une sphère spatiale, mais, après examen, celles d'un cylindre sphérique $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{S}^2$.

Notons que cela soulève la question de ce que signifie « symétrie sphérique » dans l'énoncé du problème de Schwarzschild. On généralise la notion en demandant seulement la présence d'un terme en $d\Omega^2$ dans la forme métrique avec des coordonnées angulaires (θ, φ) . Cela fait inclure le cylindre sphérique dans les surfaces de « symétrie sphérique » (at aussi le bonnet carré et la bouteille de Klein si on inclut des surfaces non orientables). Si

on n'accepte pas cette généralisation, alors la région intérieure telle qu'étudiée ici n'est pas acceptable comme solution du problème initial. Ne pas comprendre ce point peut amener des erreurs conceptuelles, comme considérer la singularité comme un « centre » ponctuel de symétrie.

Dans la région intérieure, toutes les lignes d'univers aboutissent à la singularité quand $t' \rightsquigarrow R$. L'origine de ces lignes est dans tous les cas sur la limite $t' \rightsquigarrow 0$, aussi bien en x fini qu'en x tendant vers un infini. Et on peut vérifier qu'elles ont toutes une durée propre finie dans la région : toute particule dans la région intérieure y reste et se précipite en durée propre finie vers la singularité future. La singularité apparaît non pas comme un lieu, mais comme le futur de toutes les lignes causales, y incluses donc les lignes de genre lumière, qui ont un événement dans la région intérieure.

En représentation bornée d'une tranche à θ et φ constants, la région intérieure en coordonnées de Schwarzschild se présente comme suit :



SchwK-II-v3.png

L'orientation a été choisie pour conserver le temps en ordonnées et l'espace en abscisses, selon la convention utilisée dans un diagramme de Minkowski, ainsi que pour la région extérieure.

Comme dans les autres figures, le domaine de définition est l'ouvert de fond blanc, et les lignes pointillées montrent des mouvements radiaux (au sens (θ, φ) constants). La singularité est montrée en noir, en $t' \rightsquigarrow R$. On trouve deux infinis spatiaux, en $x \rightsquigarrow \pm\infty$ et $t' \in]0, R[$, représentés en magenta. Comme l'infini spatial dans la région extérieure, cela ne représente pas des aboutissements de lignes causales.

La ligne $t' \rightsquigarrow 0$ et x fini est représentée en **rouge**. Comme dans le cas de région extérieure cette ligne mérite une étude particulière. On peut constater une différence critique, la ligne est de genre espace et non pas temps comme dans le cas de la région intérieure (en conséquence ce ne peut pas être la même ligne, l'usage de la même couleur n'est pas justifié à ce stade). En termes plus physiques, aucune ligne *spatiale* de la région intérieure n'y aboutit, par contre des lignes d'univers y commencent en temps propre fini. Cela indique une extension nécessaire. Dans le système de coordonnées utilisé un coefficient de la métrique diverge sur cette ligne, c'est au minimum une singularité de coordonnées.

Les deux points en **vert** sur la carte, en $t = 0$ et x tendant vers un infini, sont particuliers. Ce sont des commencements, en temps propre fini, de lignes d'univers (ce qui les oppose à la ligne magenta). Ces lignes sont extensibles a priori, et le statut de ces deux points sera traité ci-après.

En résumé, la frontière de la région intérieure comprend deux infinis spatiaux, une singularité temporelle future, et toute une ligne spatiale $t' \rightsquigarrow 0$, y compris les deux points $x \rightsquigarrow \pm\infty$, où aboutissent des lignes d'Univers extensibles. La région cartographiée n'est donc certainement pas complète, elle ne l'est même pas spatialement.

Connexion entre intérieur et extérieur

L'idée de trou noir « dans l'univers » implique qu'il doit exister dans le modèle des lignes d'univers partant de la région extérieure et « tombant » dans le trou noir (dans la région intérieure) en traversant l'horizon ; la question est alors où sont ces passages, où est l'horizon, sur les cartes ?

On peut supposer que les deux cartes de Schwarzschild présentent les deux parties des lignes allant de l'infini temporel passé, côté de la région extérieure, à la singularité future, côté région intérieure, et qu'il ne manquerait que l'événement qu'est le passage de l'horizon¹. La question est alors comment sont connectées les cartes des deux régions pour pouvoir joindre les deux parties de ces lignes.

Les présentations vulgarisées laissent croire que la jonction se fait par la ligne $r = R$ et t fini (en coordonnées extérieures), la ligne dessinée en rouge ; or aucune ligne d'univers n'atteint cette ligne dans la région extérieure, ce qui rend l'idée nécessairement fausse. (Sans compter la différence de genre, bien suffisante mathématiquement pour rejeter l'identification entre les deux lignes.)

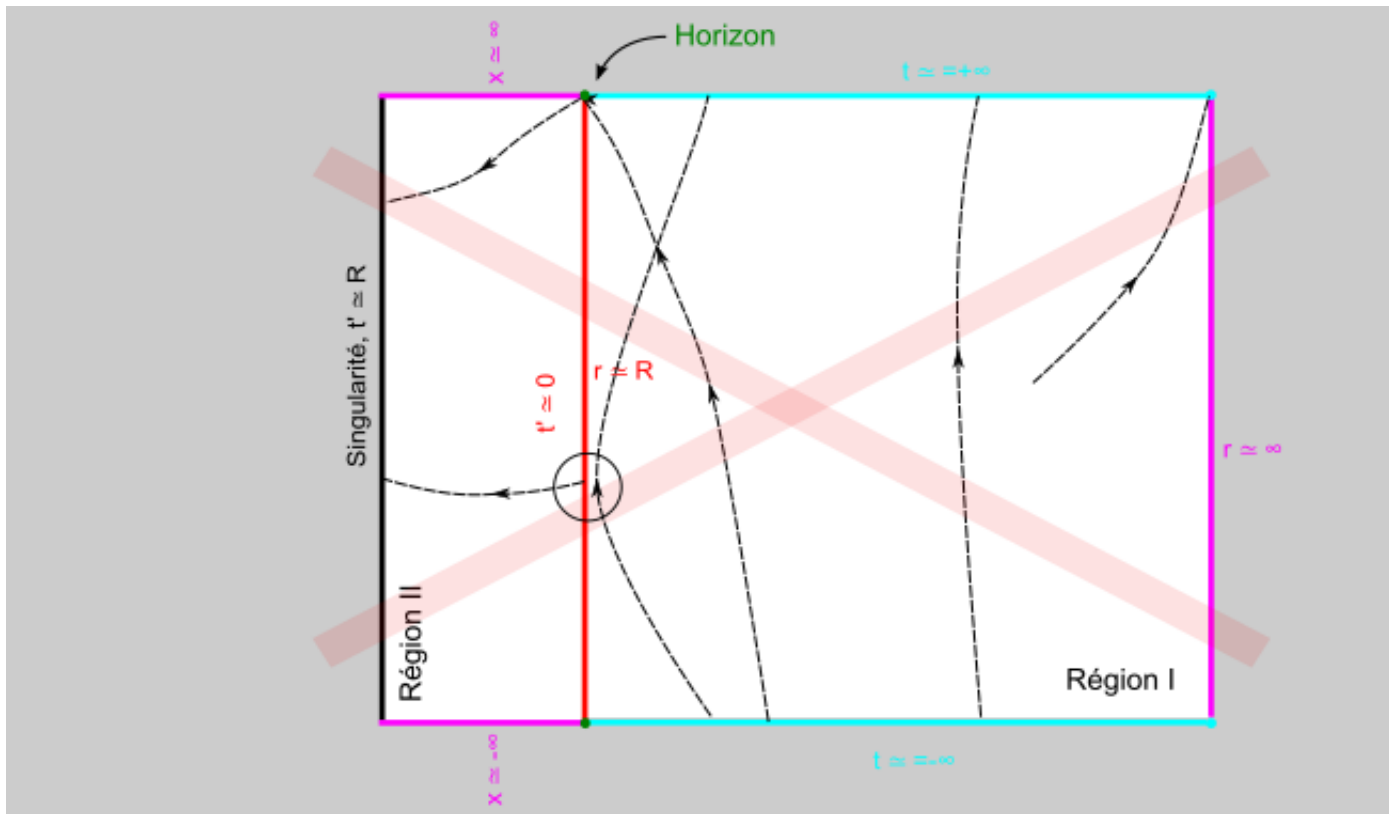
1. C'est une supposition assez gratuite, rien ne permet a priori de rejeter l'idée qu'il y ait une portion de ligne qui ne serait pas couverte par l'une ou l'autre des deux cartes.

D'après ce qu'on a vu précédemment, le « passage » ne peut se faire que là où aboutissent des lignes incomplètes côté futur. Or, côté extérieur, cela se réduit à un seul point dans une coupe (θ, φ) constant, en $t \rightsquigarrow \infty, r \rightsquigarrow R$, l'asymptote représentée par le point vert.

Côté intérieur il y a plus de possibilités, toute la ligne étendue $t \rightsquigarrow 0$. Pour différentes raisons, seuls les deux extrémités $t' \rightsquigarrow 0, x \rightsquigarrow \pm\infty$ sont candidates. Si on suppose que seul l'un des deux points fait la connexion entre les deux régions, le choix est indifférent, et on choisit celui côté des x positifs ; il s'agit juste d'une convention arbitraire de signe. Corrélativement, toutes les lignes aboutissant au reste de la frontière $t \rightsquigarrow 0$ côté intérieur, i.e., en x fini, demandent complétion, ce qui est abordé plus loin.

En termes de représentation, mettre les deux cartes côte à côte et visualiser le passage amène à mettre le point vert en commun. Attention, l'idée n'est pas de représenter *une* carte, mais bien *deux* cartes indépendantes, juxtaposées d'une certaine manière à fin d'illustration, un peu comme on le fait pour le globe terrestre quand on ajoute des cartes pour représenter les régions polaires.

La disposition que l'on trouve le plus souvent consiste aussi à mettre en commun toute la ligne frontière en rouge. C'est assez naturel quand on garde les coordonnées sous le **nom** de r et t , en dépit du fait qu'aucune ligne spatiale (de la région intérieure) ou temporelle (de la région extérieure) ne peut se continuer à travers cette frontière (et donc en dépit du bon sens). On obtient ceci:



SchwK-IetII-classic-v3.png

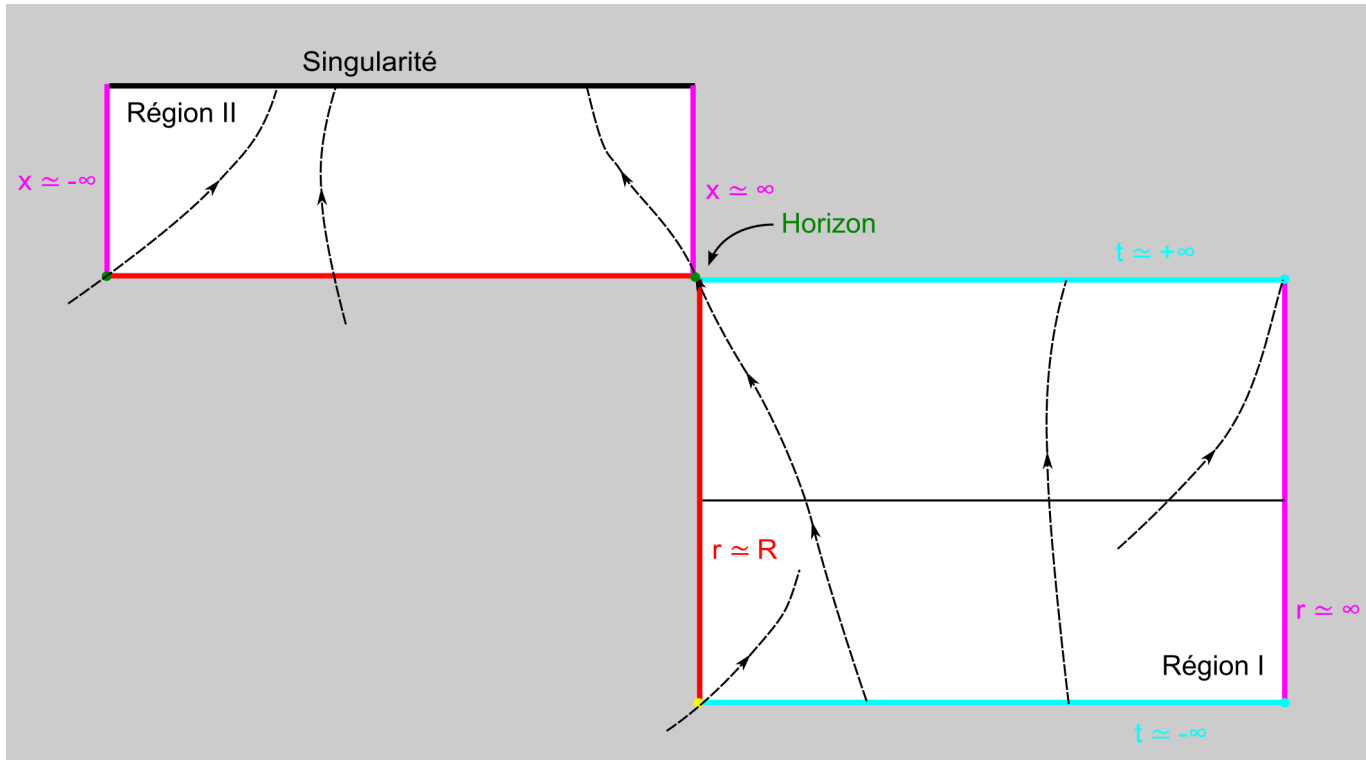
Plusieurs défauts apparaissent en évidence, certains déjà notés. Principalement :

- L'incohérence de genre des coordonnées (renforcé ici par le changement de lettre), avec la discontinuité correspondante;
- l'infini spatial $x = -\infty$ rencontre l'infini temporel passé;
- il y a des lignes d'univers qui arrivent à la ligne rouge côté intérieur sans que cela puisse faire sens de les continuer côté extérieur ;
- le voisinage en coordonnées d'un point de la ligne rouge est illusoire, il ne peut pas représenter un voisinage dans la variété; cf. en particulier la zone indiquée par un petit cercle sur le dessin : impossible d'y voir un faisceau continu de lignes d'Univers ;
- les lignes passant par le point vert futur font demi-tour ;
- les lignes passant par le point vert passé ne peuvent pas se connecter entre les deux régions, puisqu'elles partent en s'en éloignant des deux côtés.

On se perd totalement en conjectures comment interpréter physiquement un tel schéma! (Du moins, on devrait...) Il y a confusion entre la carte et ce qu'elle représente. Une

approche rationnelle consiste simplement à *rejeter* une telle disposition (et ne pas la diffuser). Mais il faut alors proposer autre chose.

Une autre disposition est proposée ici, qui pallie tous ces « défauts », et, on le verra plus loin, est bien plus naturelle pour s'occuper des lignes restant à étendre. La disposition relative des coupes radiales des deux régions est présentée comme suit:



SchwK-IetII-v3.png

Comme déjà indiqué, ce n'est pas une carte, mais une illustration. Ni les abscisses ni les ordonnées sont cohérentes, et ne sont pas notées par les mêmes lettres (t et t' dans un cas, r et x dans l'autre).

Dans ce schéma, le point vert joignant les deux cartes représente les événements de passage entre les deux régions (l'horizon donc), le passage des lignes d'univers qui connectent les deux régions. Ce point est une limite, il n'a de coordonnées ni dans une carte ni dans l'autre. Aucune des deux cartes non étendues ne contient les événements de passage de l'horizon. Pire, il n'y pas de raison que le passage se réduise à un seul événement, le même pour toutes les lignes. Au contraire, la staticité de la région extérieure (la symétrie par

translation dans le temps) demanderait que les passages puissent s'étaler dans le temps. On verra que ce point ne représente pas un unique événement de la coupe radiale, mais un ensemble d'événements, au minimum une ligne (par continuité). Par conséquence, une autre carte est nécessaire pour représenter cet ensemble correctement. Et donc un autre système de coordonnées.

Par ailleurs, les deux lignes rouges ne sont pas confondues, et ont leur orientation correcte, spatiale côté intérieur et temporelle côté extérieur. Cette présentation permet, entre autres, de laisser de la place pour l'extension éventuelle des lignes d'univers de la région intérieure aboutissant en $t' \rightsquigarrow 0$, x fini.

La complétion par ajout de régions

Le schéma avec les deux régions laisse trois cas de lignes extensibles: le point jaune, symétrique temporel de l'horizon en vert sur la carte de la région extérieure, le point vert, symétrique spatial côté x négatif dans la région intérieure, et les lignes de cette région aboutissant en $t' \rightsquigarrow 0$, x fini.

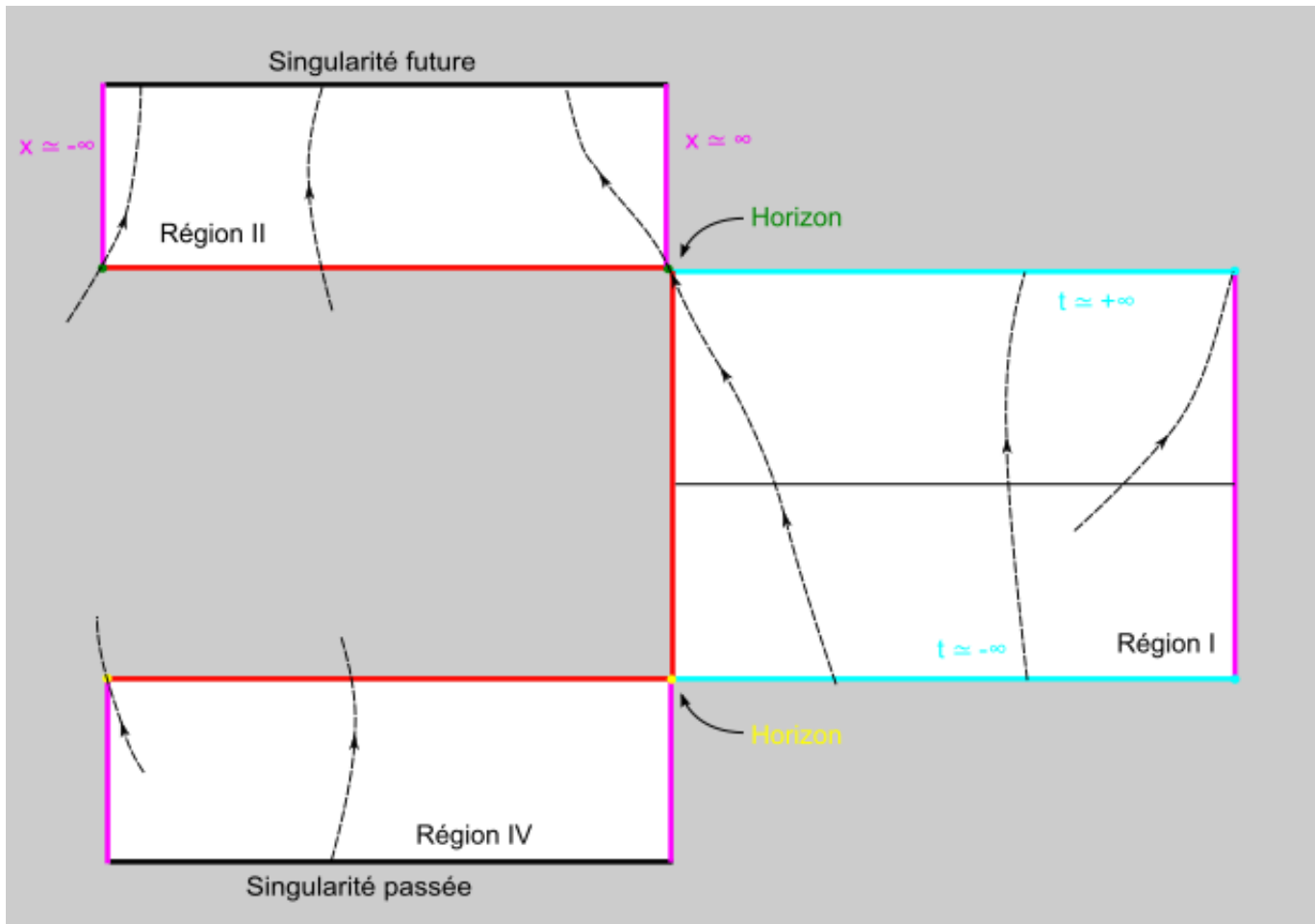
On va procéder par hypothèses paraissant simples² pour obtenir un ensemble de cartes s'approchant de la complétude, tout en gardant des coordonnées « à la Schwarzschild ».

La symétrie par renversement du temps dans la région extérieure, ainsi que celle par changement de signe de x dans la région intérieure, suggère fortement une solution consistant à viser une symétrie rectangulaire. Cela amène à rajouter deux régions, symétriques de celles déjà identifiées.

Une nouvelle région intérieure, dans le passé et symétrique de celle future, permet de prolonger les lignes d'univers aboutissant en $r \rightsquigarrow R$ et $t \rightsquigarrow -\infty$ sur la carte de la région extérieure. Ce point de la carte apparaît alors comme un horizon passé, où les lignes d'Univers ne passent que dans le sens entrant dans la région extérieure. Par symétrie, la nouvelle région intérieure fait apparaître une seconde singularité, dans le passé, où commencent en temps propre fini des lignes d'Univers.

Comme dans le cas du trou noir, la nouvelle région demande complétion côté des x négatifs. Elle a aussi des lignes d'univers finissant en temps propre fini sur une ligne rouge, dans le futur cette fois. On obtient alors:

2. Là encore des hypothèses non justifiées.

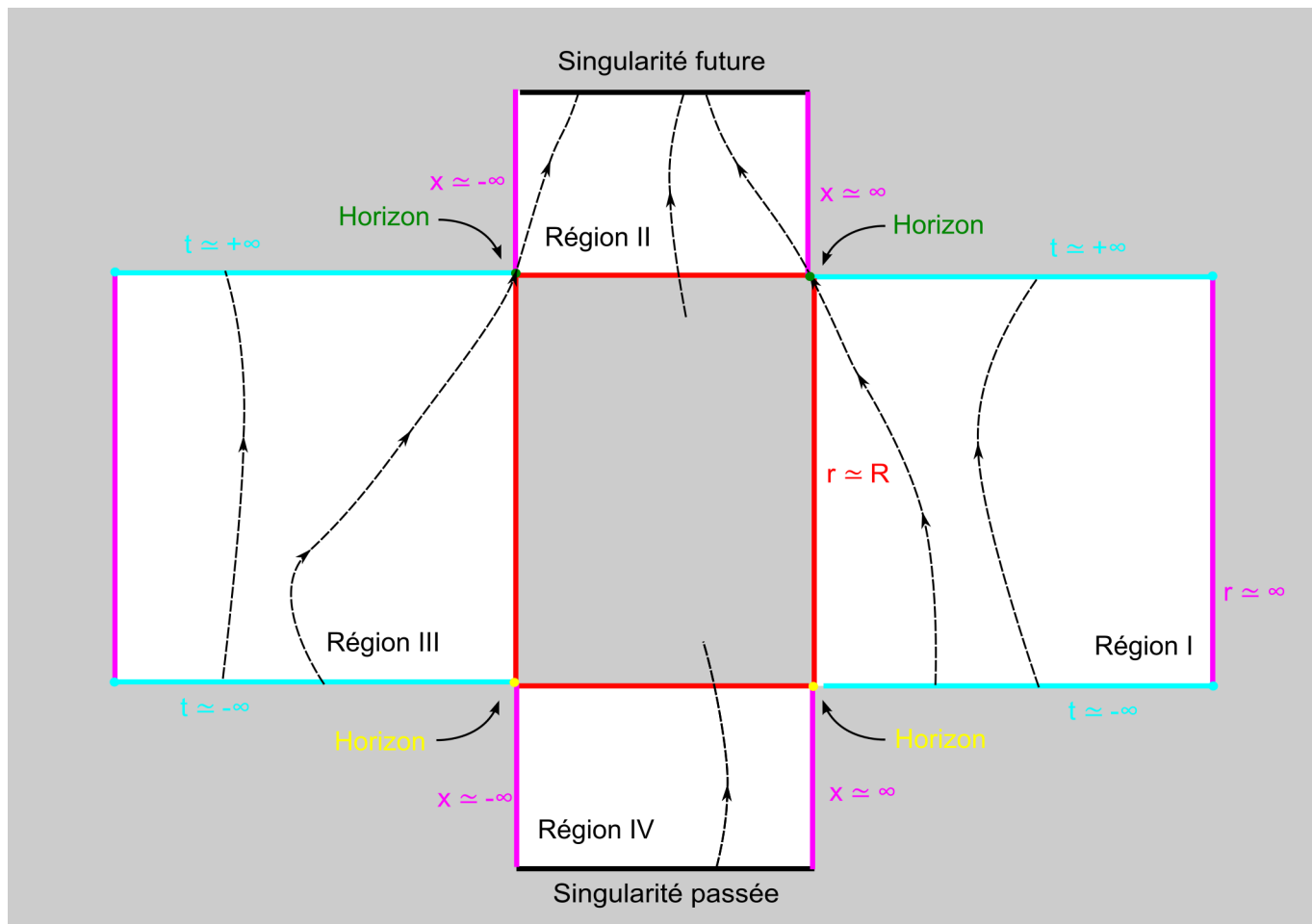


SchwK-IaIII-v3.png

À partir de cette solution à trois régions, il reste comme extensions les deux lignes rouges des régions intérieures, et les deux points vert et jaune côté des x négatifs. Le cas des lignes rouges se résout en les confondant, formant ainsi un passage direct pour des lignes d'Univers de la région intérieure passée à la région intérieure future.

Pour les deux points restants, similaires aux horizons entre reliant la région extérieures aux intérieures, il y a deux possibilités. Celle couramment présentée, et seule développée dans ce texte³, est d'ajouter, par symétrie, une nouvelle région extérieure, symétrique de celle existante. Cela finit de tout compléter, selon le schéma suivant :

3. L'autre, peu connue, est l'objet d'un autre essai.



SchwK-IaIV-v3.png

Pour les distinguer, les régions ont une numérotation traditionnelle, qu'il est temps d'indiquer. La région I est la région extérieure originelle, la région II la région intérieure originelle (trou noir, singularité dans le futur), la région III est la symétrique de la région I, et la région IV est la région intérieure avec la singularité passée (trou blanc).

Ce schéma, établi moyennant quelques hypothèses un peu gratuites (mais minimales) montre à quelques manques près un espace-temps complet. Ce n'est pas un atlas, les horizons (points verts et jaunes) et la zone centrale (en rouge) n'étant pas couverts proprement (ils le seront, moyennant le choix d'un autre système de coordonnées). Cette disposition donne néanmoins une idée d'ensemble d'une solution complète au problème de Schwarzschild, chercher une solution du vide, de « symétrie sphérique » et asymptotiquement plate.

Résumé des différentes cartes de Schwarzschild

Cela amène à considérer que la géométrie de Schwarzschild se décrit en coordonnées de Schwarzschild non pas par un seul domaine et une forme métrique, mais comme quatre régions, disjointes deux à deux, cartographiées séparément chacune avec ses coordonnées et sa forme métrique, à savoir:

Région I (l'extérieur d'origine), coordonnées (t, r, θ, φ) prises dans $t \in]-\infty, +\infty[, r \in]R, \infty[, (\theta, \varphi)$ des coordonnées de $\mathbb{S}^2$, la métrique est

$$(1 - \frac{R}{r})dt^2 - (1 - \frac{R}{r})^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2$$

Région II (l'intérieure future, le trou noir), coordonnées (t', x, θ, φ) prises dans $t' \in]0, R[, x \in \mathbb{R}, (\theta, \varphi)$ des coordonnées de $\mathbb{S}^2$, la métrique est

$$(\frac{R}{t'} - 1)dt'^2 - (\frac{R}{t'} - 1)^{-1}dx^2 - (R - t')^2d\Omega^2$$

La singularité (future) est en $t' \rightsquigarrow -R$, la sphère centrale en $t' \rightsquigarrow 0$.

Région IV (l'intérieure passée, le trou blanc), coordonnées (t', x, θ, φ) prises dans $t' \in]-R, 0[, x \in \mathbb{R}, (\theta, \varphi)$ des coordonnées de $\mathbb{S}^2$. La seule différence avec la région II consiste à changer le signe de t' . La métrique est

$$(\frac{R}{-t'} - 1)dt'^2 - (\frac{R}{-t'} - 1)^{-1}dx^2 - (R + t')^2d\Omega^2$$

ou encore

$$-(\frac{R}{t'} + 1)dt'^2 + (\frac{R}{t'} + 1)^{-1}dx^2 - (R + t')^2d\Omega^2$$

La singularité (passée) est en $t' \rightsquigarrow -R$, la limite temporelle future en $t' \rightsquigarrow 0$. Le changement de signe fait que la coordonnée t' est orientée correctement, croissante vers le futur. L'orientation de la coordonnée temporelle est ce qui justifie de distinguer les métriques des régions II et IV.

On remarquera qu'avec ce choix de coordonnées, et avec l'assimilation des lignes rouges, les systèmes de coordonnées des cartes pour les deux régions intérieures peuvent être

fusionnés. La distinction des deux régions se fait par le signe de t' , et le cas $t' = 0$ représente la ligne rouge commune (qui reste néanmoins une singularité de coordonnées, comme on va le voir).

Enfin la région III se décrit à l'identique de la région I, en une sorte d'univers parallèle.

D'autres système de coordonnées que celui de Schwarzschild permettent d'illustrer toutes les hypothèses qui ont permis d'aboutir à cette représentation.

Résumé sur les interconnexions entre régions

La surface centrale

En utilisant d'autres systèmes de coordonnées, les différentes lignes rouges apparaissant dans les cartes se révèle être un seul « point » « réel » dans la projection sur le plan avec chaque point représentant une surface (θ, φ) constants. C'est donc une singularité de coordonnées pour les coordonnées de Schwarzschild, puisque que la métrique de Schwarzschild y présente une divergence. Il s'agit d'une sphère spatiale de l'espace-temps quand on réintègre les coordonnées angulaires θ et ϕ , de rayon aréal égal à R . On l'appelle, selon la terminologie adoptée dans ce texte, la surface centrale, ou sphère centrale.

C'est aussi la seule interconnexion temporelle entre les régions II et IV, et apparaît comme la seule connexion spatiale (non causale) entre les régions I et III. L'interconnexion entre II et IV ne laisse passer que des lignes temporelles, causales, et a un sens physique. On peut se représenter la sphère centrale plongée en 3D (en omettant la coordonnée x) comme séparant deux volumes, le choix parlant étant l'intérieur pour la région II et l'extérieur pour la région IV (comme cela les lignes d'Univers y passant « tombent » vers le centre de la sphère, c'est à dire la singularité future).

L'interconnexion entre I et III, par contre, ne laisse passer que des lignes spatiales, c'est le pont d'Einstein-Rosen (ou pont de Rosen) terme qui évoque le passage entre régions. Mais ce pont n'a pas de sens physique clair (ce qui n'empêche pas, apparemment, d'en imaginer). Car il ne peut pas laisser passer une quelconque « causalité », une quelconque influence d'une des régions sur l'autre.

Les horizons

Entre une région extérieure (I ou III) et une région intérieure (II ou IV) l'interconnexion est représentée par les points verts et jaunes ; ce sont les quatre horizons (au singulier,

l'horizon désigne par défaut l'interconnexion entre I et II). Ils ont la particularité de laisser passer des lignes d'Univers mais seulement dans un seul sens. C'est ce qui amène la région II à être présentée comme un « trou noir ».

Chacun des quatre horizons est, comme cela est révélé par l'usage d'autre coordonnées, une demi-ligne ouverte en projection 2D. Tous les événements sur les horizons ont un rayon aréal égal à R . En 4D, chacun des horizons est un *cylindre sphérique*, de rayon aréal constant, et dont la génératrice est de genre lumière. En coordonnées de Schwarzschild, ce sont des singularités de coordonnées (des infinis de coordonnées). Les horizons sont joints par la sphère centrale, d'une manière difficile à visualiser.

Représentations de la géométrie de Schwarzschild avec les coordonnées de Kruskal-Szekeres

Il a été évoqué plusieurs fois d'autres systèmes de coordonnées, en particulier permettant de cartographier correctement tout ou partie de ces singularités de coordonnées qui apparaissent avec les coordonnées de Schwarzschild. Il en existe certains représentant en une seule carte une coupe à θ et ϕ constants, et complète. La plus pertinente est la carte utilisant les coordonnées de Kruskal-Szekeres. On va voir qu'au final c'est assez proche du schéma à quatre régions obtenu en figurant ensemble les quatre cartes de Schwarzschild, mais en une unique carte formant atlas à elle seule.

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres sont souvent présentées comme la plus petite description complète (sans lignes extensibles) d'une solution au problème de Schwarzschild⁴. De fait, les coordonnées de Kruskal-Szekeres permettent une formulation unique, continue et différentiable, de la métrique d'une telle solution complète. Elles ont donc entre autres (et avec d'autres systèmes de coordonnées) la propriété de couvrir correctement les horizons et la sphère centrale, et clarifient toutes les questions soulevées par les lignes extensibles dans les cartes de Schwarzschild. Le passage entre les coordonnées de Schwarzschild et celles de Kruskal-Szekeres est rarement expliqué dans la vulgarisation au-delà de la présentation des formules, et le propos principal de cette section est d'essayer de le présenter qualitativement ce passage de manière correcte, via les cartes, tout en restant, espérons-le, aisément compréhensible.

Si on suppose que le diagramme ci-dessus en coordonnées de Schwarzschild est essentiel-

4. Et souvent même comme une extension des coordonnées de Schwarzschild via quelques changements de coordonnées. La rigueur mathématique demanderait le contraire: montrer que la variété décrite en coordonnées de Kruskal-Szekeres est une solution au problème, et *ensuite* montrer, région par région, comment cela coïncide avec les différentes cartes de Schwarzschild. C'est seulement ainsi qu'on peut en conclure qu'il n'y a que l'horizon entre la région I et la région II (par exemple), conclusion difficile à atteindre sur la seule base des coordonnées de Schwarzschild.

lement complet, la relation avec les coordonnées de Kruskal-Szekeres doit être presque un-pour-un. Les difficultés principales viennent de la cartographie des horizons (passages entre régions intérieures et régions extérieures) et de la sphère centrale (lieu supposé de connexion des lignes d'Univers incomplètes dans les régions intérieures).

Présentation des coordonnées

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres sont (T, X, θ, φ) , où T est une coordonnée temporelle, X une coordonnée spatiale, et (θ, φ) des coordonnées de $\mathbb{S}^2$ (ces dernières sont communes avec leur pendant dans les coordonnées de Schwarzschild). Le plus souvent, T et X sont présentées sans dimension ; une conversion pour obtenir des valeurs dimensionnées consiste à multiplier T et X par des coefficients de dimension adapté, proportionnels à R . Dans ce texte, les valeurs dimensionnées sont utilisées, tout en gardant $c=1$, ceci pour être cohérent avec les choix fait pour les coordonnées de Schwarzschild. La forme métrique est alors

$$4\frac{R}{A}e^{-A/R}(dT^2 - dX^2) - A^2d\Omega^2$$

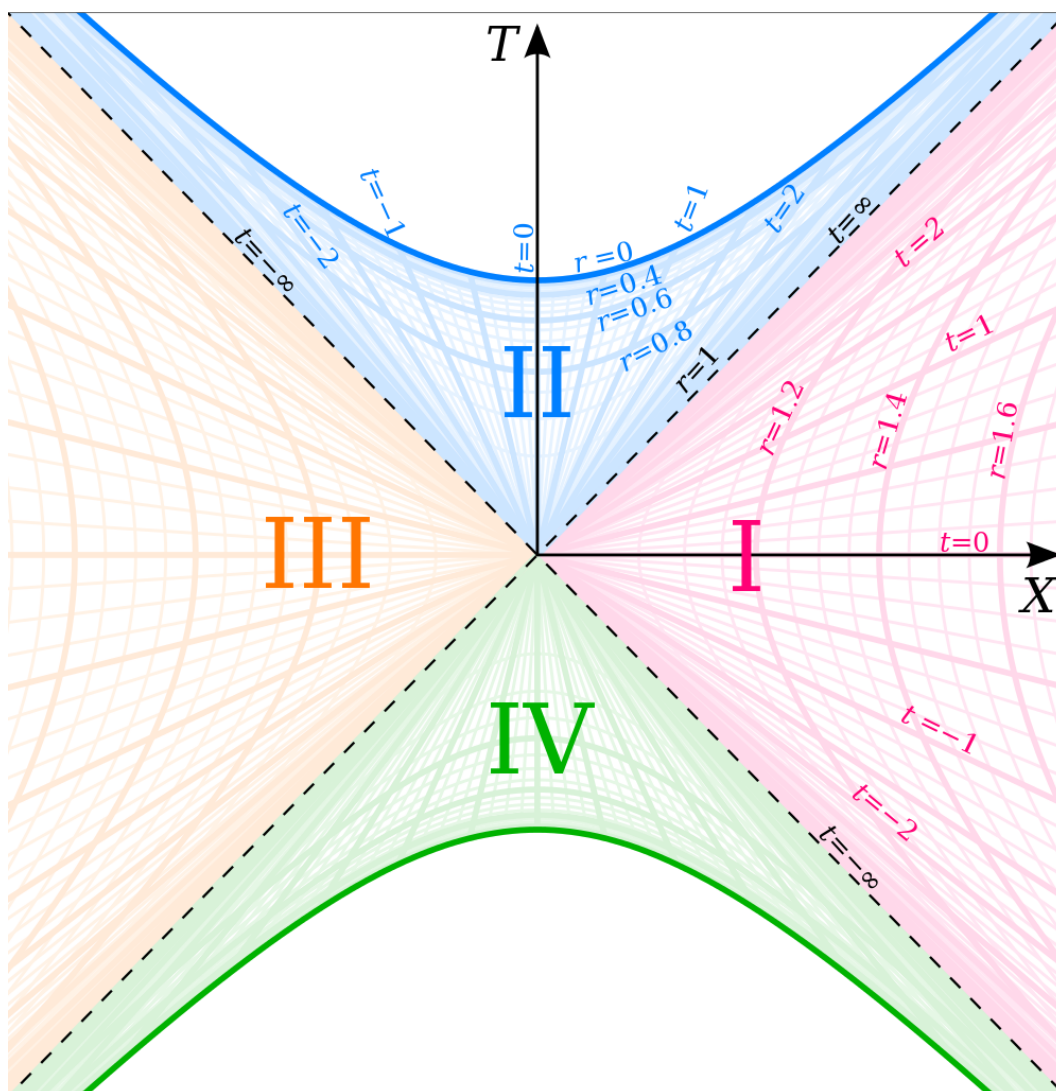
avec A une fonction de (T, X) telle que $R(R - A)e^{\rho/R} = T^2 - X^2$.

Le domaine de définition est T et X parcourant chacun $\mathbb{R}$ sous contrainte $T^2 - X^2 < R^2$, et (θ, φ) un système de coordonnées couvrant tout $\mathbb{S}^2$. Les singularités de courbure sont en $T^2 - X^2 = R^2$ et T positif (futur), et en $T^2 - X^2 = R^2$ et T négatif (passé).

Les horizons sont en $T = \pm X$, et délimitent les quatre régions, par exemple $X>0$ et $|T|<X$ correspond à la région I. Avec ces coordonnées, les quatre régions sont représentées ensemble, par une unique carte, chacune comme un secteur du plan, centré sur $X=T=0$ (la sphère centrale). Les horizons n'apparaissent plus comme des points sur un diagramme 2D, mais comme des lignes d'événements normaux, celles séparant les régions ; enfin, la sphère centrale se présente comme un point.

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres partagent pas mal de similarités avec les coordonnées de Schwarzschild pour les régions *intérieures*. En particulier, X est très similaire à x , il n'est pas interprétable comme un rayon comme dans des coordonnées sphériques.

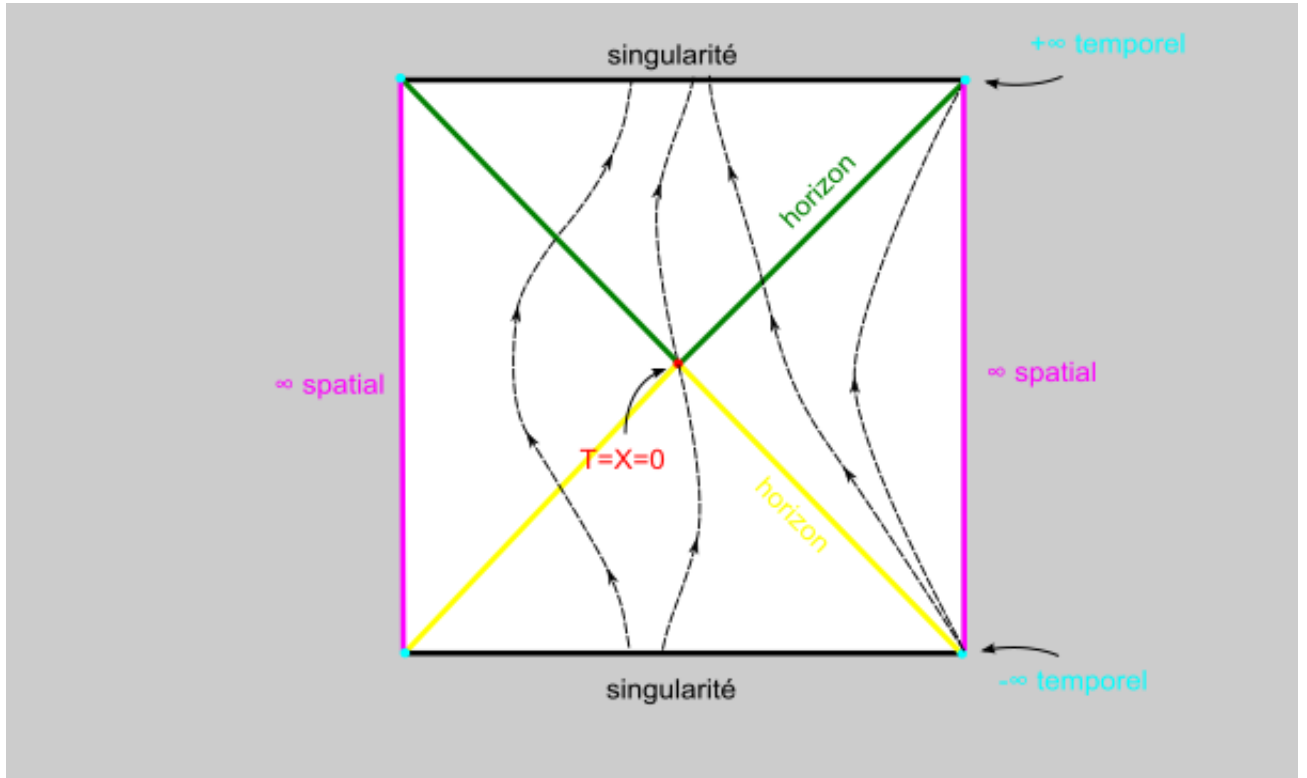
La carte d'une coupe θ et φ constants se présente comme suit, T en ordonnée, X en abscisse, sans natif (sans fonction de bornage), avec un code couleur différent de celui utilisé précédemment (la figure vient de Wikipédia, © voir https://en.wikipedia.org/wiki/File:Kruskal_diagram_of_Schwarzschild_chart.svg) :



KruskalDiagramOfSchwarzschildChart.png

Sur cette carte, la lettre r et t sont les coordonnées de Schwarzschild, sans correction de notation ; on peut considérer que r dénote le rayon aréal, sans unité, donc égal à 1 sur les horizons.

Une représentation bornée, en appliquant une fonction bornant T et X indépendamment est:



KS-4K-v3.png

On retrouve les singularités des régions intérieures et les infinis spatiaux des régions extérieures comme frontières, à l'instar de la représentation en coordonnées de Schwarzschild. Par contre, les infinis temporels des régions extérieures se réduisent à un point, et y aboutissent toutes les lignes d'univers qui sont complètes dans la région. Les infinis spatiaux des régions intérieures se confondent avec ces infinis spatiaux.

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres font apparaître les horizons comme des lignes d'événements non frontaliers (lignes vertes et jaunes) ; les événements de passage entre une région intérieure et une région extérieure se disposent sur toutes les valeurs non nulles de T .

Enfin, aux coordonnées $T=X=0$, la sphère centrale se réduit comme annoncé à un point non frontalier (donc une sphère d'événements dans l'espace-temps). Les lignes d'univers dans les régions intérieures aboutissent à la ligne rouge dans les cartes de Schwarzschild

s'y connectent, comme par exemple la ligne $X=0$. Ces lignes passent directement de la région IV à la région II, sans aucun événement dans les régions extérieures. Elles sont inextensibles, allant de singularité à singularité.

Les horizons peuvent se définir comme les événements de passage de lignes d'univers entre une région intérieure et une région extérieure, soit quatre horizons, IV à I, IV à III, I à II et III à II. La sphère centrale peut se définir comme les événements de passage direct de lignes d'univers entre IV et II.

La carte ci-dessus n'est pas totalement satisfaisante, mais adaptée à l'aboutissement d'un morphing à partir des coordonnées de Schwarzschild. Le défaut principal est que les coins représentent à la fois les infinis temporels des régions extérieures et les limites des horizons et des singularités ; en particulier la distinction entre infinis temporels « normaux » et singularité n'est pas mise en évidence. Une autre représentation sera présentée plus loin.

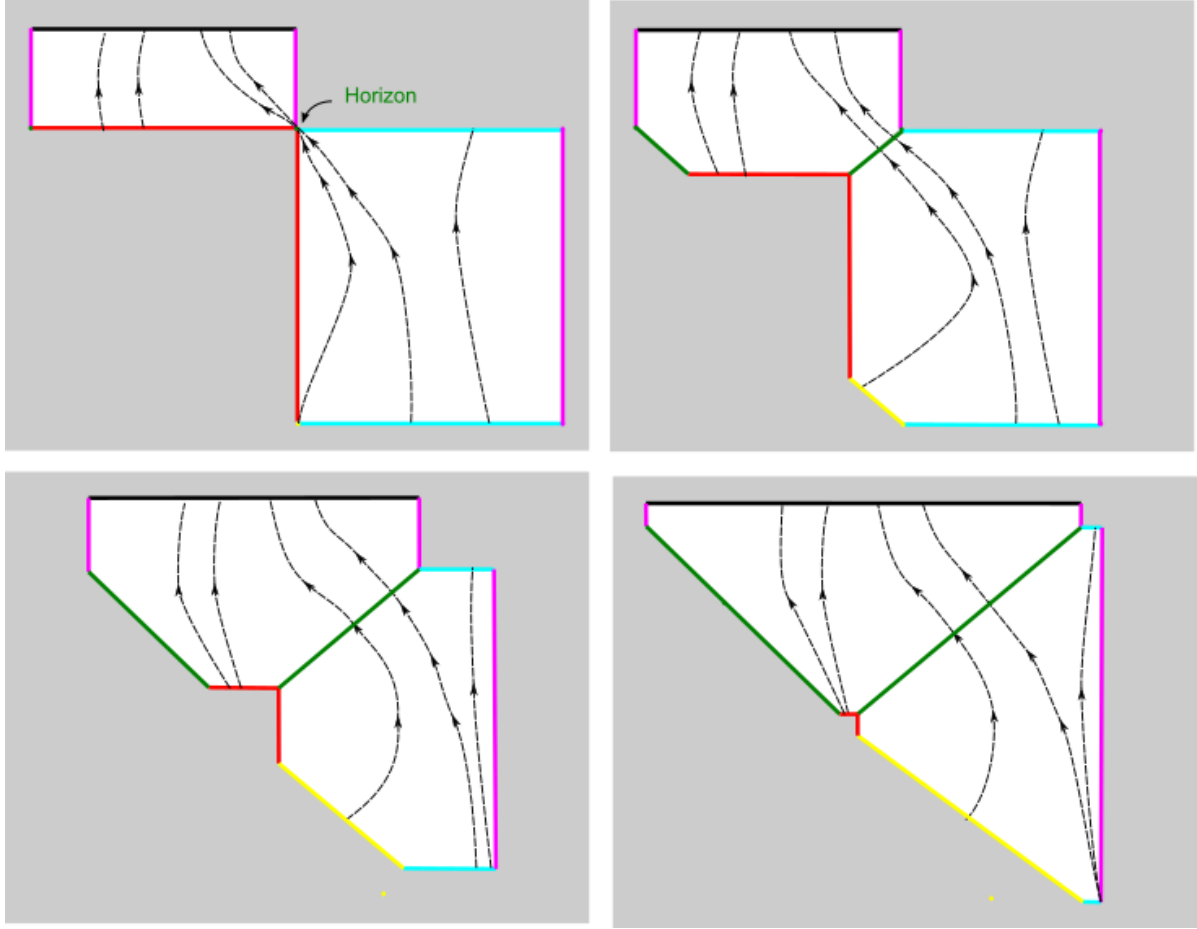
Morphing

Comparer les cartes de Schwarzschild avec les quatre régions ensemble, et la carte de Kruskal-Szekeres permet de commencer à voir les relations. On peut les illustrer en montrant comment passer « graphiquement » d'une carte à l'autre.

Le passage des coordonnées de Schwarzschild à celles de Kruskal-Szekeres introduit des déformations des lignes intérieures, mais surtout des modifications importantes des limites des cartes. On va analyser cela cas par cas, couleur par couleur. La remarque la plus importante est que, sur les limites, des points peuvent devenir des lignes et réciproquement.

Quelques étapes intermédiaires, très schématiques, sont présentées dans la figure suivante (telles quelles ce ne sont pas des cartes correspondant à des systèmes de coordonnées bien définis) permettent d'illustrer la transformation. On peut ainsi imaginer une suite continue de systèmes de coordonnées passant des coordonnées de Schwarzschild à celles de Kruskal-Szekeres et faire un petit film, dont les quatre dessins seraient des instantanés.

C'est limité aux régions I et II, les autres s'en déduisent par symétrie.



Les horizons (points vert et jaune en limite de cartes de Schwarzschild) deviennent des lignes qui s'étendent d'un côté vers la sphère centrale, et de l'autre vers l'infini, où ils vont à la rencontre des singularités et de divers infinis. En coordonnées de Kruskal-Szekeres ces lignes ne sont plus en limite de carte, mais des éléments comme les autres de la carte, elles se développent dans la zone blanche. Les lignes d'univers passant par l'horizon, originellement via le même point en limite de coordonnées, se séparent pour passer en des événements d'horizon distincts, ainsi que cela doit être.

Les lignes rouges, $r = R$ en région I et $t' = 0$ en région II, se rétractent, elles finiront par n'être plus qu'un point, la sphère centrale, de coordonnées de Kruskal-Szekeres $T = X = 0$, qui, comme les horizons ne sera plus en limite. Les demi-lignes d'univers dans les régions II et IV finissent par se rejoindre à la sphère centrale. En les suivant à l'envers, les connexions se font à x de signes opposés, la valeur limite de x , en coordonnées de Schwarzschild quand la demi-ligne tend vers la sphère centrale, étant en relation avec la vitesse d'arrivée sur la sphère centrale en coordonnées de Kruskal-Szekeres.

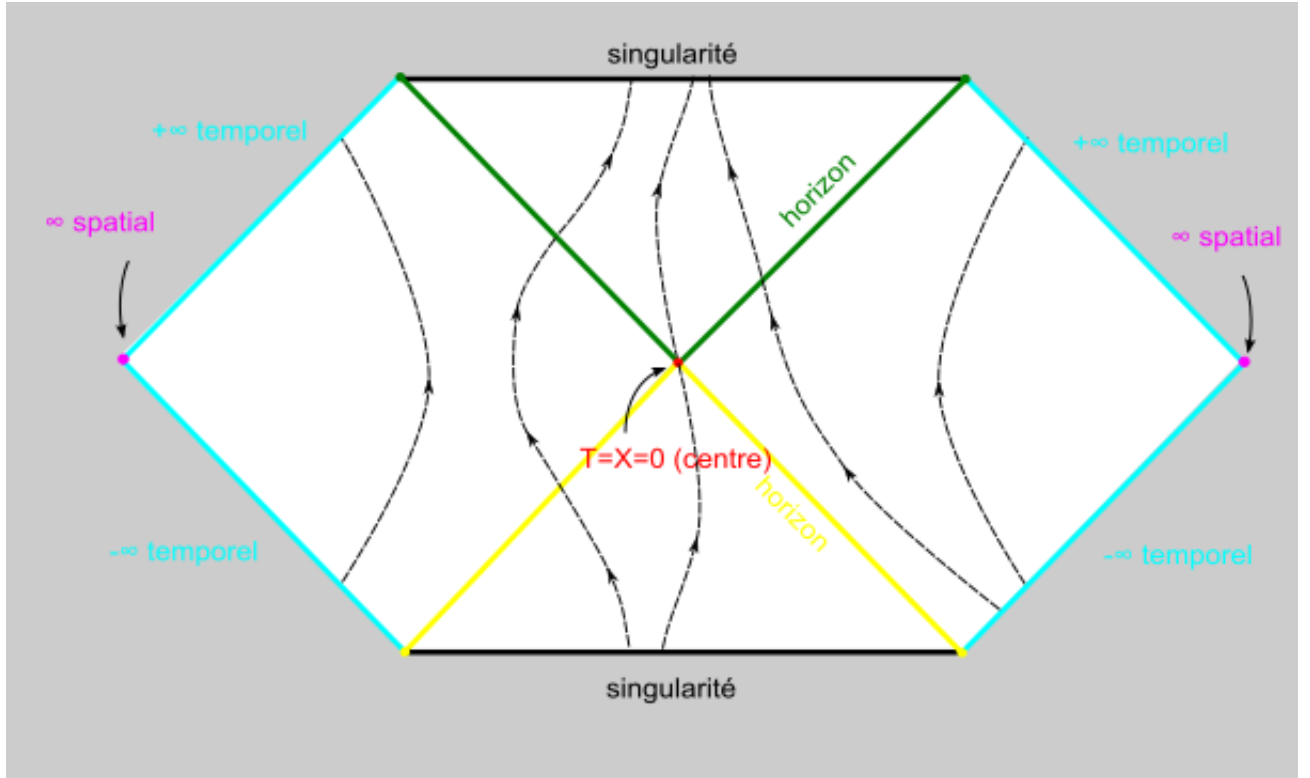
Les singularités sont peu affectées.

Les lignes représentant les infinis spatiaux dans la région II disparaissent. Un effet parasite est la rétraction des infinis temporels de la région extérieure en des points (points sur le diagramme 2D, des sphères dans l'espace-temps), alors qu'ils représentent l'aboutissement de lignes d'univers. Parallèlement, les lignes des infinis spatiaux des régions extérieures, qui ne correspondent pas des aboutissements de lignes d'univers, restent des lignes, alors qu'on les verrait bien se rétracter, à l'instar des infinis spatiaux des régions intérieures.

Le message principal est que la combinaison des quatre cartes de Schwarzschild représente bien le même espace-temps que la carte unique de Kruskal-Szekeres, ce sont simplement des cartes différentes de la même variété. Celles de Schwarzschild sont moins complètes (mais ont d'autres avantages), alors que carte de Kruskal-Szekeres l'est, au sens où aucune ligne d'univers ne peut être étendue en dehors.

Vers une représentation à la Penrose

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres telles quelles, non bornées, ont la propriété que les radiales de genre lumière se présentent, dans un diagramme 2D représentant une coupe à θ, φ constants, comme des lignes à 45° . En appliquant une fonction bornante identique sur X et T , seules les lignes représentant les horizons gardent cette propriété. Une variante consiste à appliquer les fonctions bornantes à $X - T$ et $X + T$, ce qui permet de garder les radiales lumière à 45° . On obtient alors quelque chose qui ressemble à:



KS-4D.png

L'infini spatial de chacune des régions extérieures se réduit à un point sur la carte. Les infinis temporels, aboutissements des lignes temporelles de durée propre infinie restant à l'extérieur, redeviennent des lignes. Par contre, les infinis spatiaux des régions intérieures se sont réduits à des points frontaliers. On a là certainement une des cartes les plus parlantes de la solution de Schwarzschild.

La figure est générique pour différentes fonctions bornantes. Cependant, un choix particulier de la fonction bornante appliquée à $X-T$ et $X+T$ permet d'obtenir des coordonnées *conformes*, à savoir telles que la métrique se présente sous la forme

$$F^2(X', T')(dT'^2 - dX'^2) - G^2(X', T')(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

On obtient alors ce qu'on appelle un diagramme de Penrose (que l'on devrait appeler plutôt des coordonnées de Penrose, ou des cartes de Penrose).

On pourrait aussi s'intéresser à un diagramme de Penrose en partant des coordonnées de Schwarzschild. [À faire, éventuellement.]