

Congruence et référentiel

Amanuensis

24 octobre 2024

Textes et dessins, ©Amanuensis

1 Introduction

Ce document résume quelques réflexions sur la relation entre les concepts de congruence en RG et de référentiel.

2 Référentiels

Un référentiel peut être vu en quatre dimensions comme un feuilletage de mouvements, chacun de ces mouvement étant celui d'un point matériel immobile relativement au référentiel. C'est donc une congruence de genre temps¹. On utilisera le terme de « mouvement d'immobilité », sous-entendu relativement au référentiel, pour chacune des lignes de la congruence.

La différentielle de chacun de ces mouvement définit un vecteur (4D) unitaire orienté de genre temps en chaque événement. Ce champ est noté X dans ce document.

On n'utilise pas de datation dans ce qui suit.

Il y a deux manières (au moins) de définir une variété spatiale qu'on appellerait « espace ». Une première, non adoptée dans ce document, serait définie par la datation. Une deuxième, utilisée ici, est définie par les vecteurs perpendiculaires à X .

Par la suite les termes « espace » et qui en dérivent, comme l'adjectif « spatial », réfèrent à la notion tirée de la perpendicularité à X . L'adjectif « temporel » signifie en gros « dans la direction X ». On a ainsi un découpage entre temps et espace, qui n'est que ponctuellement euclidien, en fait « lorentzien ». Ponctuellement signifie ici propre à un événement ; il s'agit du découpage de l'espace vectoriel tangent, qu'on peut assimiler à l'espace vectoriel tangent d'un espace-temps de Minkowski de même X . Mais c'est seulement ponctuel, le passage aux événements voisins est donné par la connexion affine, ce qui détermine la structure de l'espace-temps courbe, ainsi que les géodésiques

1. (Norton)

(les mouvements de chute libre). Ces relations sont ce qui est modélisé par la dérivée covariante (autre aspect de la connexion), $\nabla \vec{X}$ ou notée encore ∇X .

∇X est un (champ sur l'espace-temps de) tenseur d'ordre deux. Appliqué à un vecteur V cela donne un vecteur $\nabla_V X$, qui est la dérivée directionnelle de X dans la direction de V .

Comme $\vec{X}$ représente conceptuellement des « vitesses », $\nabla \vec{X}$ est conceptuellement une forme d'accélération. $\nabla_V X$ est l'accélération propre « du référentiel » dans la direction V . En particulier, $\nabla_X X$ est l'accélération propre du mouvement d'immobilité passant par l'événement (et dont la quadri-vitesse est X).

Comme $\vec{X}$ est unitaire, donc de norme constante, sa dérivée covariante $\nabla \vec{X}$ est spatiale (perpendiculaire à X), car

$$\nabla (\vec{X} \cdot \vec{X}) = 2 \nabla \vec{X} \cdot \vec{X} = 0$$

3 Analyse de l'article sur les congruences

La notion de congruence en RG peut être abordée avec la page du Wiki anglophone intitulée *Congruence (general relativity)*. Une section concernant la « décomposition cinématique » est commentée en détail, ci-après. Les commentaires visent à appliquer aux référentiels des concepts présentés à propos des congruences.

Dans cet article il est question de vecteurs. Il s'agit de vecteurs en quatre dimensions.

Extrait [https://en.wikipedia.org/wiki/Congruence_\(general_relativity\)#The_kinematical_decomposition_of_a_timelike_congruence](https://en.wikipedia.org/wiki/Congruence_(general_relativity)#The_kinematical_decomposition_of_a_timelike_congruence)

3.0.1 The kinematical decomposition of a timelike congruence

Consider the timelike congruence generated by some timelike *unit* vector field X ,

La donnée de base est une congruence temporelles, générée par un champ de vecteurs unitaires de genre temps X .

Cette donnée mathématique peut être assimilée à un référentiel, le vecteur en un événement étant vu comme la quadri-vitesse (unitaire et orientée) du mouvement d'immobilité passant par l'événement. Les lignes composant la congruence sont les mouvements d'immobilité définissant le référentiel.

which we should think of as a first order linear partial differential operator. Then the components of our vector field are now scalar functions given in tensor notation by writing $\vec{X}f = f_{,a} X^a$, where f is an arbitrary smooth function.

Cela indique simplement que va être utilisée la notation indicielle, un tenseur étant noté par une lettre (comme X) et des indices muets indiquant sa nature (X^a est un vecteur) et utilisables pour noter des contractions via la convention d'Einstein (indices répétés haut et bas indiquant une sommation).

The acceleration vector is the covariant derivative $\nabla_{\vec{X}}\vec{X}$; we can write its components in tensor notation as: $\dot{X}^a = X^a_{;b}X^b$

$X^a_{;b}$ est l'écriture indicielle de $\nabla_{\vec{X}}$, la dérivée covariante du champ X . Quand appliquée à un vecteur V , le résultat est la variation de X dans la direction de V , et est noté en indiciel $X^a_{;b}V^b$.

$\dot{X}^a = X^a_{;b}X^b$ est la notation pour $\nabla_{\vec{X}}\vec{X}$, c'est à dire la dérivée covariante de X appliquée dans sa direction, c'est à dire à la direction du mouvement d'immobilité local.

Comme X s'interprète comme un champ de quadri-vitesses, sa dérivée covariante s'interprète comme un champ de tenseurs d'accélération.

$\nabla_{\vec{X}}\vec{X}$ est donc de l'accélération propre du mouvement d'immobilité local (sous entendu en un événement, et pour le mouvement d'immobilité y passant, pour le référentiel).

C'est un champ de vecteurs spatiaux. Dans le suite du texte il n'est question que de quadri-vecteurs. Mais ceux qui sont perpendiculaires à X sont assimilables à des vecteurs 3D de l'espace vectoriel spatial.

Soit un point matériel de mouvement M passant par l'événement, $\nabla_{\vec{X}}\vec{X}$ est l'entraînement du point « dans le sens du temps » dû à l'accélération propre du référentiel, et c'est un effet « spatial ». C'est l'opposé de l'accélération de la pesanteur, relativement au référentiel.

Next, observe that the equation: $(\dot{X}^a X_b + X^a_{;b}) X^b = X^a_{;b} X^b - \dot{X}^a = 0$ means that the term in parentheses at left is the *transverse part* of $X^a_{;b}$.

L'écriture est plus claire comme

$$(\dot{X}^a X_b + X^a_{;b}) X^b = -\dot{X}^a + X^a_{;b} X^b = 0$$

car $X_b X^b = -1$ avec la convention de signe sous-jacente.

La nullité du terme à gauche exprime l'orthogonalité entre le terme entre parenthèses et X .

D'après le texte il s'agit de la partie *transverse* de $X^a{}_{;b}$, c'est à dire la partie « spatiale » de la dérivée covariante de X . C'est ambigu. S'agit-il de la partie spatiale du résultat de l'application de $\nabla \vec{X}$ sur un vecteur, ou de l'application de $\nabla \vec{X}$ sur un vecteur spatial?

Si c'était le résultat d'une dérivée directionnelle (un vecteur), la contraction devrait être sur l'indice a , pas sur l'indice b . L'interprétation est donc que la formule entre parenthèses est l'application de ∇X à la partie d'un vecteur orthogonale à X .

Cette formule est un tenseur d'ordre 2. Si on l'interprète comme une fonction vectorielle, qui à Y^b associe le vecteur $(\dot{X}^a X_b + X^a{}_{;b}) Y^b$, l'orthogonalité indique qu'elle s'annule sur X , autrement dit son résultat est celui de l'application de la fonction à la seule partie spatiale de Y .

Cette partie transverse de ∇X (résultat de l'application de ∇X) est au cœur de la notion de décomposition cinématique.

Puisque ∇X a un résultat spatial, $(\dot{X}^a X_b + X^a{}_{;b})$ est une fonction 3D, entre vecteurs de l'espace (au sens sous-espace vectoriel des vecteurs perpendiculaires à X).

Si $\nabla_X X$ est l'opposée de la pesanteur, l'application de ∇_X à des directions transverses à X doit avoir un rapport avec les déplacements spatiaux, donc avec la vitesse relative au référentiel, ce qui fait penser à l'accélération de Coriolis, comme il sera développé plus loin.

This orthogonality relation holds only when X is a timelike unit vector of a "Lorentzian" Manifold. It does not hold in more general setting.

« unit » et lorentzien pour que $X_b X^b = -1$.

Write: $h_{ab} = g_{ab} + X_a X_b$ for the projection tensor which projects tensors into their transverse parts; for example, the transverse part of a vector is the part orthogonal to $\vec{X}$.

On vérifie

$$h_{ab} X^a = (g_{ab} + X_a X_b) X^a = g_{ab} X^a + X_a X^a X_b = X_b - X_b = 0$$

en prenant en compte la signature, car $X_a X^a = -1$.

Perso je préfère $h_{ab} = g_{ab} - X_a X_b$, ce qui correspond au choix de signature $+-$.

En vectoriel la partie colinéaire de W à X unitaire est $(W.X)X$, et donc la partie orthogonale est $W-(W.X)X$, autre écriture pour le projecteur orthogonal à X .

This tensor can be seen as the metric tensor of the hypersurface whose tangent vectors are orthogonal to X .

Soit, mais sans application ensuite.

Thus, we have shown that: $\dot{X}_a X_b + X_{a;b} = h^m_a h^n_b X_{m;n}$

Simple réécriture, avec descente de l'indice a . L'utilisation de h_{ab} à la fois raccourcit les équations, et les rend plus opaques.

L'article aurait pu poser cette écriture plus tôt, elle signifie qu'on prend l'orthogonal (indice m) de l'application de $X_{m;n}$ (la dérivée covariante de X) à l'orthogonal (indice n) d'un vecteur quelconque (indiqué b). Autrement dit la partie totalement transverse, réduite à l'espace, de la dérivée covariante de X . Si on note $\perp$ l'opérateur d'orthogonalisation (à X), alors $\dot{X}_a X_b + X_{a;b}$ pourrait se noter $\perp \nabla_\perp X$, et son application à un vecteur V serait notée $\perp \nabla_\perp V X$.

La descente de l'indice a correspond à la contraction avec la forme métrique g_{ac} . Par exemple $X_{a;b} = g_{ac} X^c_{;b}$. Le passage à une 2-forme linéaire prépare les symétrisation et anti-symétrisation, qui ne sont pas appliquées (usuellement) entre un indice haut et un indice bas. Pas évident que ce soit autre chose qu'une pratique.

Next, we decompose this into its symmetric and antisymmetric parts:

$$\dot{X}_a X_b + X_{a;b} = \theta_{ab} + \omega_{ab}$$

Cette décomposition a particulièrement un sens parce que c'est le terme « réduit au spatial » de ∇X , dont l'application « temporelle » ($\nabla_X X$) est la pesanteur (au signe près).

La décomposition, écrite en 4D, est au fond en 3D puisque tous les vecteurs sont spatiaux, et on peut la rapprocher de ce qu'on peut faire en mécanique des fluides.

Here:

$$\theta_{ab} = h^m{}_a h^n{}_b X_{(m;n)}$$

$$\omega_{ab} = h^m{}_a h^n{}_b X_{[m;n]}$$

are known as the ‘expansion tensor’ and ‘vorticity tensor’ respectively.

Que θ_{ab} soit la partie symétrique est noté par les () sur les indices, et que ω_{ab} soit la partie antisymétrique est noté par les [] sur les indices.

Par exemple

$$\theta_{ab} = \frac{1}{2} (h^m{}_a h^n{}_b X_{m;n} + h^n{}_a h^m{}_b X_{n;m})$$

On remarquera que la permutation des indice n et m porte aussi sur leur présence sur les h .

Because these tensors live in the spatial hyperplane elements orthogonal to $\vec{X}$, we may think of them as ‘three-dimensional’ second rank tensors.

En les interprétant comme des tenseurs d’ordre 2 en dimension 3 sur l’espace (l’écriture est en dimension 4), on peut les comprendre comme suit.

$g^{ca}\omega_{ab}$ peut être vu comme la matrice d’une rotation spatiale, et en particulier comme celle d’un référentiel tournant en classique. Alors l’application de ω peut être rapprochée, quand appliqué à une vitesse relative au référentiel, du terme d’accélération de Coriolis dans l’expression de l’accélération lors d’un changement de référentiel en classique.

$g^{ca}\theta_{ab}$ n’a pas d’équivalent comparable dans les changements de référentiel en mécanique classique (mais peut-être en mécanique des fluides). La matrice est celle d’une dilatation/compression (et cisaillement ?) spatiale.

Une hypothèse serait que, appliquée à une vitesse relative au référentiel (pour rester dans la comparaison avec Coriolis), cela indique l’effet de la divergence des géodésiques, donc de la courbure en RG.

This can be expressed more rigorously using the notion of Fermi–Walker transport. Therefore, we can decompose the expansion tensor into its traceless part plus a trace part. Writing the trace as θ , we have:

$$\theta_{ab} = \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab}$$

Je n'ai pas étudié le transport de Fermi-Walker.

L'interprétation de la trace θ est l'évolution du volume lors d'un déplacement indépendant de sa direction, nulle si volume constant, expansion ou contraction sinon.

la signification du terme sans trace (appelé plus loin dans le texte du Wiki 'shear tensor', tenseur de cisaillement (un terme de mécanique des fluides ou des solides élastiques) doit être les déformations à volume constant.

Because the vorticity tensor is antisymmetric, its diagonal components vanish, so it is automatically traceless (and we can replace it with a three-dimensional "vector", although we shall not do this). Therefore, we now have:

$$X_{a;b} = \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} - \dot{X}_a X_b$$

This is the desired 'kinematical decomposition'. In the case of a timelike "geodesic" congruence, the last term vanishes identically.

Ce qui est décomposé est donc ∇X , la dérivée covariante de X , c'est à dire de la congruence ou du référentiel.

La décomposition comprend trois premiers termes « spatiaux », et un terme de pesanteur.

The expansion scalar, shear tensor (σ_{ab}), and vorticity tensor of a timelike geodesic congruence have the following intuitive meaning:

1. The expansion scalar represents the fractional rate at which the volume of a small initially spherical cloud of test particles changes with respect to proper time of the particle at the center of the cloud,

Déjà abordé.

2. The shear tensor represents any tendency of the initial sphere to become distorted into an ellipsoidal shape,

Déjà abordé.

3. The vorticity tensor represents any tendency of the initial sphere to rotate; the vorticity vanishes if and only if the world lines in the congruence are everywhere orthogonal to the spatial hypersurfaces in some foliation of the spacetime,

Cela semble bien se traduire comme un référentiel non tournant.

in which case, for a suitable coordinate chart, each hyperslice can be considered as a surface of 'constant time'. See the citations and links below for justification of these claims.

La par contre, ce n'est pas spécifique aux référentiels non tournants, toute datation a cette propriété. Peut-être que la datation est restreinte, dans l'esprit du rédacteur, à une qui est datation propre pour toutes les lignes de la congruence (tous les mouvements d'immobilité du référentiel).

4 La relation avec l'accélération de Coriolis

Analysons un mouvement quelconque M , relativement à un référentiel de champ X (comme analysé ci-dessus) En un événement du mouvement, dM est un quadri-vecteur représentant la vitesse relative au référentiel. On peut la choisir normalisée, et alors elle s'écrit $V = \gamma(X + W)$, avec $W.V = 0$, $W.W = -v^2$ et ' $\gamma^2(1 - v^2) = 1$ [A Vérifier].

L'application de ∇X à ce vecteur donne la dérivée de X dans la direction du mouvement M ,

$$\nabla_V X = \gamma \nabla_X X + \gamma \nabla_W X$$

et est, en utilisant la décomposition

$$X_{a;b} \gamma (X^b + W^b) = \left(\sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} - \dot{X}_a X_b \right) (\gamma X^b + \gamma W^b)$$

$$X_{a;b} \gamma (X^b + W^b) = \left(\sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} \right) \gamma W^b - \dot{X}_a X_b \gamma X^b$$

$$X_{a;b} \gamma (X^b + W^b) = (\sigma_{ab} + \omega_{ab}) \gamma W^b + \frac{1}{3} \theta \gamma W_a + \gamma \dot{X}_a$$

$$X_{a;b} \gamma (X^b + W^b) = (\sigma_{ab} + \omega_{ab}) \gamma W^b + \frac{1}{3} \theta \gamma W_a + \gamma X_{a;b} X^b$$

Le dernier terme est la pesanteur multipliée par γ , le reste est l'application de la partie transverse de ∇X à la partie spatiale de la quadri-vitesse. La décomposition cinématique permet d'y voir $\sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab}$ appliqué à la partie spatiale de la quadri-vitesse, soit, vu dans l'espace 3D, l'application d'une matrice 3x3 à la vitesse relative W , de module v . Le résultat est proportionnel à v . L'application θh_{ab} , une simple multiplication scalaire par θ , ajoute un terme dans la direction la vitesse relative, proportionnel à v et à θ . C'est l'effet d'une expansion (ou réduction, selon le signe) spatiale isotrope. Il est facile de voir dans ω_{ab} qui est antisymétrique une rotation, et donc son application à W l'accélération de Coriolis. Enfin, le terme $\sigma_{ab} \gamma W^b$ est la déformation à « volume constant » de X dans la direction spatiale du mouvement, proportionnel à v .

5 Qu'en penser ?

La décomposition cinématique s'applique à chaque événement d'un référentiel. La décomposition est en 4D, elle est indépendante de tout choix de coordonnées, et tous ses éléments sont « physiques », localement mesurables. C'est évident pour le terme de pesanteur, et aussi pour l'accélération de Coriolis (cf. le pendule de Foucault). La mesure des deux autres termes, qui manifestent la gravitation est moins usuelle, mais devrait être possible.

5.1 Relation avec un changement de référentiel

Finalement, on arrive à ce que $\nabla_V X$ ressemble à l'accélération d'entraînement apparaissant en classique lors d'un changement de référentiel, au signe près, avec : l'accélération linéaire d'entraînement à vitesse nulle (relativement au référentiel, donc pour $V = X$, $\nabla_X X$) égale à la pesanteur; une accélération de Coriolis (perpendiculaire à la vitesse, proportionnelle au module de la vitesse); et un terme ressemblant à l'accélération de Coriolis, mais ayant une matrice symétrique interprétée comme la somme d'une expansion/réduction spatiale isotrope, et une déformation à volume constant. Ce dernier terme se rapproche à un effet de marée, donc un effet de la gravitation (ou, pareil, du non parallélisme des géodésiques).

Faire un parallèle avec un changement entre deux référentiels n'est pas évident, puisqu'il n'est sujet que d'un seul référentiel.

6 Quelques cas

6.1 Espace-temps de Minkowski, référentiel inertiel

On a alors $\nabla X = 0$, c'est plat, on peut voir X constant selon la connexion.

Tous les termes de la décomposition sont partout nuls, pesanteur nulle, rotation nulle, pas d'expansion, pas de déformation.

6.2 Espace-temps de Minkowski, référentiel rigide tournant

Les seuls termes non nuls sont la pesanteur et $\gamma\omega_{ab}W^b$, l'accélération de Coriolis.

Le terme de pesanteur dépend du point.

6.3 Espace-temps de Minkowski, référentiel de Rindler

Il s'agit d'un référentiel rigide, en accélération rectiligne uniforme

Le seul terme non nul est celui de pesanteur.

Le terme de pesanteur dépend peut-être du point.

6.4 Espace-temps de Minkowski, référentiel rigide quelconque

Pareil, le terme de pesanteur inclut l'accélération linéaire du référentiel et le terme dépendant du point, lié à la rotation.

6.5 FLRW, référentiel comobile

Si l'interprétation proposée est correcte, les termes de la décomposition sont nuls sauf θ , dont la valeur peut dépendre de la date comobile, et seulement de celle-ci.

6.6 Espace-temps de Schwarzschild, référentiel de chute libre radial

C'est l'exemple d'un nuage de mouture de café en chute libre radiale vers la Terre, les grains forment un référentiel. On néglige l'influence de tous les autres astres.

Il s'agit d'une solution du vide, ce qui implique que les volumes géodésiques sont constants, $\theta = 0$.

Il s'agit d'un référentiel de chute libre non tournant, la pesanteur est nulle et ω est nul.

A priori, θ_{ab} n'est pas nul, et indique une accélération dans le sens de la verticale et une dans l'autre sens en perpendiculaire à la verticale, toutes proportionnelles à la vitesse relative v . Elles peuvent dépendre du point.

6.7 Espace-temps de Schwarzschild, référentiel de chute libre en orbite, sans rotation

Il s'agit du cas d'un vaisseau en orbite, ne tournant pas relativement aux astres les plus lointains. On néglige l'influence de tous les autres astres.

La pesanteur $\nabla_X X$ est nulle, ainsi que θ . θ_{ab} n'est pas nulle. Le cas de ω_{ab} n'est pas évident, car il y a révolution autour de la terre, et, peut-être l'effet Lense-Thirring à prendre en compte.